MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

59. BAND 4. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 8. FEBRUAR 1954)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1954

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut
H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebsvertretung des Verlages im Ausland:

Lange, Maxwell & Springer Ltd., 242 Marylebone Road, London N.W. 1.

---

59. Band **Inhalt** 4. Heft

Seite

Stuloff, N., Ein Beitrag zur Theorie spezieller Dirichletscher Reihen 339

Weier, J., Normale Abbildungsscharen 356

Huckemann, F., Bestimmung der Wertverteilung der Gammafunktion aus ihrer Riemannschen Fläche 375

Huckemann, F., Typusänderung bei Riemannschen Flächen durch Verschiebung von Windungspunkten 383

Meinardus, G., Asymptotische Aussagen über Partitionen 388

Koecher, M., Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades. I 399

Peyerimhoff, A., Summierbarkeitsfaktoren für absolut Cesàro-summierbare Reihen 417

STULOFF, N.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 339—355 (1954)

Ein Beitrag zur Theorie spezieller Dirichletscher Reihen.

Von
N. STULOFF.

Die klassische Frage nach einer erschöpfenden Charakteristik einer durch eine konvergente Reihe der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu s}, \qquad s = \sigma + it,$$

dargestellten Funktion, wobei

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \to \infty \tag{1}$$

eine *fest vorgegebene* Zahlenfolge ist, führte unter anderem zu der *Verallgemeinerung*, daß über die Exponentenmenge $\{\lambda_\nu\}$ nur deren Abzählbarkeit vorausgesetzt wird. Ferner wird diese Menge nicht mehr von vorneherein vorgegeben, sondern sie ist einer gegebenen *entwickelbaren* Funktion *zugeordnet* in dem Sinne, daß die Exponenten mittels eines bestimmten Kalküls aus der Funktion zu bestimmen sind[1]). Dieses und der Verzicht auf die Konvergenz einer solchen Reihe und die Hinzunahme der durch Exponentialpolynome gleichmäßig approximierbaren Funktionen zur betrachteten Funktionenklasse[1]) ergaben eine übersichtliche Eigenschaft: *Die Fastperiodizität* (H. BOHR). Man ist aber andererseits an das obige Problem auch dadurch herangetreten, daß man die Eigenschaften solcher Funktionen auf der reellen Achse studierte, wobei auch die soeben besprochenen Verallgemeinerungen Anwendung fanden[2]). Die vorliegende Mitteilung liefert nun zu diesem Fragenkreis einen Beitrag, der sich mit Reihen der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x}, \qquad a_\nu \geq 0, \quad x \geq 0, \quad \lambda_\nu > 0,$$

befaßt, die für $x \geq 0$ konvergieren, und wo an die Exponentenmenge $\{\lambda_\nu\}$ außer deren Abzählbarkeit noch weitere Forderungen gestellt werden [z. B. ist (1) eine solche]. Solche Reihen werden wir *spezielle* DIRICHLETsche *Reihen* nennen, im Gegensatz zu den *verallgemeinerten* DIRICHLETschen *Reihen*, bei denen diese Menge beliebig abzählbar ist. Das gewonnene Ergebnis wird sich

[1]) BOHR, H.: Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. Acta Math., Stockh. **47**, 237—281 (1926).

[2]) MÜNTZ, CH.: Über den Approximationssatz von WEIERSTRASS, Mathematische Abhandlungen (Schwarzes Festschrift), S. 303—312. Berlin 1914. — KALUZA, TH.: Entwickelbarkeit von Funktionen in DIRICHLETsche Reihen. Math. Z. **28**, 203—215 (1928). — SCHWARTZ, L.: Études des Sommes d'Exponentielles Réelles. Paris 1943. — STULOFF, N.: Über die Entwickelbarkeit von Funktionen in verallgemeinerte DIRICHLETsche Reihen. Math. Z. **53**, 273—284 (1950). — STULOFF, N.: Absolut konvergente verallgemeinerte DIRICHLETsche Reihen im Reellen. Math. Z. **54**, 329—338 (1951).

dann mittels einiger Abänderungen sowohl für den Fall einer *vorgegebenen* als auch für den der *zugeordneten* Menge $\{\lambda_\nu\}$ aussprechen lassen, und ferner wird man erkennen, daß es gerade die speziellen DIRICHLETschen Reihen sind, die dieses einfache Resultat liefern[3]), so daß hier im Reellen die Dinge umgekehrt zu liegen scheinen wie vorhin: *Die Spezialisierung führt hier zur Vereinfachung.*

Wenn im folgenden von einer Funktion die Rede sein wird, die den Bedingungen (α) genügt, so verstehen wir darunter eine für $x \geqq 0$ definierte, für $x > 0$ beliebig oft differenzierbare Funktion $f(x)$, für die

$$(\alpha) \qquad (-1)^n f^{(n)}(x) \geqq 0 \quad \text{für} \quad x > 0 \quad \text{und} \quad n = 1, 2, \ldots,$$
$$f(0) = f(+0), \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0, \quad f(x) \not\equiv 0,$$

gilt; dies sind Eigenschaften, die man einer gegebenen Funktion unschwer ansehen kann. Die erste Forderung wird uns die Darstellbarkeit von $f(x)$ liefern als STIELTJESsches Momentenintegral, und es wird sich darum handeln, aus der Menge aller Momentenfunktionen diejenigen auszusondern, deren monoton wachsende Belegungsfunktion an jeder Stelle ihres Definitionsintervalles gleich der Summe der nicht rechts davon liegenden Sprünge (d.h. eine *Sprungfunktion*) ist. Es wird sich dann zeigen, daß dies bei der Voraussetzung von (1) (bzw. bei ähnlichen Voraussetzungen über $\{\lambda_\nu\}$) in einfacher Weise möglich ist. Die anderen Forderungen in (α) dienen nur der Bequemlichkeit.

In § 1 wird ein Satz bewiesen, der für die Theorie grundlegend ist und aus dem sich dann die Sätze des § 2 ganz einfach ergeben, die auf die soeben besprochenen verschiedenen Entwicklungsprobleme eingehen. Schließlich bringt § 3 ein Beispiel zu einem der zuvor bewiesenen Entwicklungssätze.

§ 1.

Wir beweisen jetzt einen Satz, bei dem über die Menge $\{\lambda_\nu\}$, zunächst etwas abweichend von (1), nur vorausgesetzt ist, daß diese im Inneren von $(0, \infty)$ keine Häufungspunkte besitzt (so daß also die 0 ein Häufungspunkt sein kann), da dies für den Beweisgang einfacher ist. Wir werden dann später wieder auf (1) zurückkommen. Die Exponenten werden bei dem folgenden Satz nicht vorgegeben, sondern sie sind, in dem in der Einleitung erwähnten Sinne, der Funktion auf Grund ihrer *Entwickelbarkeit* ebenso wie die Koeffizienten *zugeordnet.*

Satz 1. *Eine vorgelegte Funktion $f(x)$ möge den Bedingungen (α) genügen. Es gilt:*

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x} \quad \textit{mit} \quad a_\nu \geqq 0, \ \textstyle\sum a_\nu \ \textit{konvergent}, \quad \lambda_\nu > 0,$$

$\{\lambda_\nu\}$ ohne Häufungspunkte im Inneren von $(0, \infty)$, dann und nur dann, wenn es zu jeder reellen Zahl $0 < \Lambda < \infty$ zwei Zahlen $0 < \varkappa_1 < \Lambda$ und $\infty > \varkappa_2 > \Lambda$ gibt, derart, daß

$$(F) \qquad \liminf_{n \to \infty} \left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa}}{\Lambda} \right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}\right) \leq C$$

[3]) Vgl. damit etwa das Ergebnis für verallgemeinerte DIRICHLETsche Reihen in dem in Fußnote 2 zitierten ersten Aufsatz des Verfassers.

ist für $\varkappa = \varkappa_1$ und $\varkappa = \varkappa_2$. Hierbei ist $0 < C < \infty$ eine nur von der gegebenen Funktion abhängige Konstante.

Für das Folgende setzen wir zur Abkürzung

$$F \equiv F(f, \Lambda, \varkappa, n) \equiv \left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa}}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}\right)$$

und verstehen unter (F) die obige Beziehung.

Beweis. Die Notwendigkeit obiger Bedingungen können wir direkt zeigen, indem wir mit einer, durch die nicht identisch verschwindende Reihe definierten Funktion $f(x)$, die offenbar den Bedingungen (α) genügt, den ersichtlich nicht negativen Ausdruck F bilden. Es wird jetzt also, nach Wahl eines beliebigen positiven Λ,

$$F = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left[\frac{\lambda_\nu}{\Lambda}\left(\frac{e^{-\lambda_\nu}}{e^{-\Lambda}}\right)^{1/\varkappa}\right]^n, \tag{2}$$

und wir wollen nun die Existenz der beiden Zahlen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ im Sinne der Behauptung zeigen. Wir nehmen zunächst an, es sei

$$\Lambda \notin \{\lambda_\nu\},$$

und zerlegen jetzt die uns mit der Reihe gegebene Menge $\{\lambda_\nu\}$ in

$$\{\lambda_\nu\} = \{\lambda'_\nu\} + \{\lambda''_\nu\} \tag{3}$$

derart, daß

$$\lambda'_\nu < \Lambda \quad \text{und} \quad \lambda''_\nu > \Lambda \tag{3a}$$

ist. Nach der über $\{\lambda_\nu\}$ gemachten Voraussetzung gibt es sicher zwei Zahlen Λ_l und Λ_r, so daß

$$\Lambda_l < \Lambda < \Lambda_r \tag{4}$$

ist und kein λ_ν sich in diesem Intervall befindet. Nun definieren wir eine Funktion $\Omega(u)$ für $0 < u < \infty$ durch:

$$\Omega(u) = \frac{\lg \frac{u}{\Lambda}}{u - \Lambda} \quad \text{für} \quad u \neq \Lambda \qquad \text{und} \qquad \Omega(u) = \frac{1}{\Lambda} \quad \text{für} \quad u = \Lambda. \tag{5}$$

Diese ist, wie man leicht bestätigt, im ganzen Definitionsintervall positiv, monoton nach 0 *abnehmend* und es ist $\lim_{u \to 0} \Omega(u) = \infty$. Wegen $\lim_{u \to \Lambda} \Omega = 1/\Lambda$ ist unsere Funktion auch überall stetig und bildet das Intervall (4) ab auf ein nicht leeres Intervall

$$\Omega(\Lambda_l) < \Omega < \Omega(\Lambda_r), \tag{6}$$

das wir mit I_Ω bezeichnen wollen, und in welchem der Funktionswert $\Omega(\Lambda) = 1/\Lambda$ liegt. Nun wählen wir eine positive Zahl $\varkappa_1$ derart, daß die Größe $1/\varkappa_1$ sich ebenfalls in I_Ω befindet und ferner so, daß

$$\frac{1}{\varkappa_1} > \frac{1}{\Lambda}$$

wird. Es ist jetzt aber wegen der Monotonie von $\Omega(u)$ und mit (4) und (6)

$$\frac{1}{\varkappa_1} < \Omega(u) \quad \text{für alle} \quad u \leqq \Lambda_l < \Lambda$$

und

$$\frac{1}{\varkappa_1} > \Omega(u) \quad \text{für alle} \quad u \geqq \Lambda_r > \Lambda.$$

Damit und mit (3), (3a) und (5) erhalten wir die Beziehungen

$$\frac{\lg \frac{\lambda_\nu''}{\Lambda}}{\lambda_\nu'' - \Lambda} < \frac{1}{\varkappa_1} < \frac{\lg \frac{\lambda_\nu'}{\Lambda}}{\lambda_\nu' - \Lambda}, \tag{7}$$

woraus folgt, da ja

$$\lambda_\nu' - \Lambda < 0 \quad \text{und} \quad \lambda_\nu'' - \Lambda > 0$$

ist, daß

$$\frac{\lambda_\nu}{\Lambda}\left(\frac{e^{-\lambda_\nu}}{e^{-\Lambda}}\right)^{1/\varkappa_1} < 1 \tag{8}$$

wird für *alle* λ_ν.

Da nun nach Voraussetznng $a_\nu \geqq 0$ und $\sum a_\nu$ konvergiert, so konvergiert wegen (8) die Reihe (2) gleichmäßig in n, und nach gliedweisem Grenzübergang folgt

$$\lim_{n \to \infty} F = 0 \tag{9}$$

für $\varkappa_1 < \Lambda$. Durch Annahme eines $\varkappa_2 > \Lambda$ mit

$$I_\Omega \ni \frac{1}{\varkappa_2} < \frac{1}{\Lambda}$$

folgt sodann nach derselben Schlußweise ebenfalls Gl. (9). Ist nun

$$\Lambda \in \{\lambda_\nu\},$$

etwa $\Lambda = \lambda_\sigma$, dann schreiben wir

$$F = a_\sigma + \sum_{\nu=1}^{\infty}{}' a_\nu \left[\frac{\lambda_\nu}{\Lambda}\left(\frac{e^{-\lambda_\nu}}{e^{-\Lambda}}\right)^{1/\varkappa}\right]^n, \tag{10}$$

wo unter $\sum'$ eine Summe zu verstehen ist, bei der das Glied $\nu = \sigma$ fehlt. Auf diese Summe können wir aber dieselben Betrachtungen wie vorhin anwenden, da es nun um λ_σ eine Umgebung gibt, in die keines der anderen λ_ν hineinfällt. Es ist demnach

$$\lim_{n \to \infty} F = a_\sigma > 0. \tag{11}$$

Da die a_ν beschränkt sind, folgt schließlich, daß es zu $f(x)$ eine Konstante $C > 0$ derart gibt, daß

$$\lim_{n \to \infty} F \leqq C$$

ist, womit auch die Notwendigkeit bewiesen ist.

Um nun zu zeigen, daß eine Funktion, die den Forderungen des Satzes 1 genügt, gleich einer der dortigen DIRICHLETschen Reihe ist, benötigen wir für

die vorgelegte Funktion $f(x)$ die bereits in der Einleitung erwähnte Integraldarstellung. Dazu fassen wir einige Ergebnisse einer Arbeit von F. HAUSDORFF zusammen zu der folgenden, für uns geeigneten Form[4]):

Eine für $x \geqq 0$ definierte und für $x > 0$ beliebig oft differenzierbare reelle Funktion $f(x)$ ist dann und nur dann gleich dem STIELTJESschen Momentenintegral,

$$f(x) = \int_0^1 u^x \, d\chi(u),$$

mit monoton wachsender, an den Endpunkten 0 und 1 stetiger, beschränkter und nicht identisch verschwindender Belegungsfunktion $\chi(u)$, wenn $f(x)$ den Forderungen (α) genügt. $\chi(u)$ ist umkehrbar eindeutig zugeordnet, wenn man die Normierungen

$$\chi(0) = 0 \quad \text{und} \quad \chi(u) = \chi(u + 0)$$

hinzunimmt.

Wir heben noch die bekannte Tatsache hervor, daß es für $\chi(u)$ eine Darstellung der Form

$$\chi(u) = \Phi(u) + \Psi(u)$$

gibt[5]), wo $\Phi(u)$ *stetig* und *monoton* ist in $0 \leqq u \leqq 1$ und $\Psi(u)$ eine *Sprungfunktion* ist, die durch Aufsummierung der Sprünge von $\chi(u)$, deren Menge ja höchstens abzählbar ist, entsteht und (in unserem Fall) stetig ist in $u = 0$ und in $u = 1$. Insbesondere sind dies zwei monoton wachsende und beschränkte Funktionen, auf die obige Normierungen sinngemäß anzuwenden sind.

Mithin können wir setzen

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x), \tag{12}$$

wo also

$$\varphi(x) = \int_0^1 u^x \, d\Phi(u) \qquad \text{und} \qquad \psi(x) = \int_0^1 u^x \, d\Psi(u) \tag{13}$$

zwei Funktionen sind, die ihrerseits (α) erfüllen (d. h. *total monoton* sind) und insbesondere also nicht negativ sind.

Mit einem beliebigen, fest gewählten $0 < \Lambda < \infty$ und dem dazu nach Voraussetzung vorhandenen

$$0 < \varkappa_1 < \Lambda \tag{14}$$

bilden wir jetzt den wegen (α) nicht negativen Ausdruck F der S. 341 und setzen sogleich für $f(x)$ die obige Darstellung (12). Dann lautet die Voraussetzung

$$\liminf_{n \to \infty} \left[\left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa_1}}{\Lambda} \right)^n \varphi^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa_1}\right) + \left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa_1}}{\Lambda} \right)^n \psi^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa_1}\right) \right] \leqq C.$$

[4]) HAUSDORFF, F.: Summationsmethoden und Momentfolgen, I und II. Math. Z. 9, 74—109, 280—299 insbes. S. 95, 102—103, 286—287 (1921).

[5]) Vgl. HAUPT, O., u. G. AUMANN: Differential- und Integralrechnung, 2. Aufl., Bd. 1, S. 96. Berlin 1948.

Infolge der soeben erwähnten Eigenschaft (α) der beiden Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ist nun jeder der beiden Summanden in der eckigen Klammer stets nicht negativ, so daß auch

$$\liminf_{n\to\infty}\left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa_1}}{\Lambda}\right)^n \varphi^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa_1}\right) \leq C$$

ist. Setzen wir nun hier für $\varphi(x)$ die obige Integraldarstellung (13) ein, dann wird schließlich

$$\liminf_{n\to\infty}\int_0^1 \left[-\frac{\lg u}{\Lambda}\left(\frac{u}{e^{-\Lambda}}\right)^{1/\varkappa_1}\right]^n d\Phi(u) \equiv \liminf_{n\to\infty}\int_0^1 [v(u)]^n\, d\Phi(u) \leq C, \tag{15}$$

wo wir zur Abkürzung den Ausdruck in der eckigen Klammer gleich $v(u)$ gesetzt haben. Offenbar ist $v(0)=0$ und $v(1)=0$, dazwischen hat $v(u)$ genau ein Maximum, das sich an der Stelle $u_M = e^{-\varkappa_1}$ ergibt und dessen Größe wir mit v_M bezeichnen wollen. Es ist ersichtlich $v(e^{-\Lambda})=1$ und mit $e^{-\Lambda} \neq e^{-\varkappa_1}$ folgt

$$v_M = v(e^{-\varkappa_1}) > v(e^{-\Lambda}) = 1. \tag{16}$$

Es bezeichne u_1 die Stelle $e^{-\Lambda}$; aus Stetigkeitsgründen gibt es sicher noch genau eine zweite Stelle, u_2, wo $v(u)=1$ ist und infolge (16) gibt es eine Umgebung von u_M, die ganz im Inneren von $[u_1, u_2]$ gelegen ist derart, daß dort $v(u)>1$ ist.

Nun ist ja mit (14)

$$u_1 = e^{-\Lambda} < e^{-\varkappa_1} = u_M,$$

und wir können zwei positive Zahlen η_1 und η_2 so bestimmen, daß

$$u_1 < \eta_1 < u_M < \eta_2 < u_2 \tag{17}$$

ist. Es gibt also eine Zahl $V>1$, so daß

$$v(u) \geq V > 1 \quad \text{für} \quad \eta_1 \leq u \leq \eta_2 \tag{18}$$

ist, also etwa $V = \min[v(\eta_1), v(\eta_2)]$; η_1 und η_2 werden wir später noch schärfer präzisieren. Wir können jetzt schreiben

$$\begin{aligned}\int_0^1 [v(u)]^n\, d\Phi(u) &= \int_0^{\eta_1} [v(u)]^n\, d\Phi(u) + \int_{\eta_1}^{\eta_2} [v(u)]^n\, d\Phi(u) + \int_{\eta_2}^1 [v(u)]^n\, d\Phi(u) \\ &\geq \int_{\eta_1}^{\eta_2} [v(u)]^n\, d\Phi(u) \geq V^n[\Phi(\eta_2) - \Phi(\eta_1)],\end{aligned}$$

denn sämtliche Terme sind ja nicht negativ. Wenn nun n beliebig groß wird, dann strebt wegen (18), falls die eckige Klammer im letzten Ausdruck von 0 verschieden ist,

$$V^n[\Phi(\eta_2) - \Phi(\eta_1)] \to \infty.$$

Dies wäre aber ein Widerspruch zu (15), so daß also

$$\Phi(\eta_2) - \Phi(\eta_1) = 0$$

folgt. Da aber $\Phi(u)$ monoton nicht abnehmend ist und $\eta_2 \neq \eta_1$, so folgt daraus

$$\Phi(u) = \text{const.} \quad \text{für} \quad \eta_1 \leq u \leq \eta_2.$$

Sind $\varepsilon > 0$ und $0 < \delta < \varepsilon$ zwei noch weiter festzulegende Zahlen, dann wird, nachdem wir $u_1 + \varepsilon = u_\varepsilon$ und $u_1 + \delta = \eta$ gesetzt haben mit (17)

$$u_1 < \eta < u_\varepsilon < u_M < u_2,$$

wenn wir das $\varepsilon > 0$ klein genug wählen. Dabei war ja u_M eine Zahl, die mit der Angabe von $\varkappa_1$ festlag. Insbesondere können wir das η_1 aus (17) jetzt so wählen, daß $\eta_1 = \eta$ ist. Es liegt also der Funktionswert von $\Phi(u)$ an der Stelle u_ε im Inneren eines Konstanzintervalles. Da aber $\Phi(u)$ überall *stetig* ist und $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgegeben werden kann, so gehört der Funktionswert an der Stelle u_1 ebenfalls zu diesem Konstanzintervall.

Nun kann man aber diesen Gedankengang gemäß Voraussetzung für *jedes* $0 < \Lambda < \infty$ anstellen und damit für *jeden* Punkt $u = e^{-\Lambda}$ aus dem Inneren von (0, 1) zeigen, daß an dieser Stelle sich der Anfangspunkt eines Konstanzintervalles von $\Phi(u)$ befindet. Greifen wir nun irgendeinen solchen Punkt u heraus, so können wir auf jeden Punkt aus dem Inneren des zu ihm nach obigem *gehörigen* Konstanzintervalles unser Ergebnis anwenden und somit dieses Intervall weiter nach rechts fortsetzen. Angenommen, es sei U die obere Grenze dieser Intervalle, die also zusammen ein Konstanzintervall ergeben, $u < U < 1$, dann gehört aber, wiederum wegen der Stetigkeit von $\Phi(u)$, der Funktionswert an der Stelle U ebenfalls zu diesem Intervall. Da aber nach obigem für U wieder derselbe Schluß gilt, so folgt, entgegen unserer Annahme, daß U nicht die obere Grenze der betrachteten Intervalle ist. Diese ist also bei 1 und gehört selbst ebenfalls zu dem bei u beginnenden Konstanzintervall. Da u ein beliebiger Punkt aus dem Inneren vom (0, 1) war, so können wir nach Vorgabe eines beliebig kleinen $\varepsilon_1 > 0$ das u so wählen, daß $0 < u < \varepsilon_1$ ist. Wegen $\Phi(0) = 0$ und der Stetigkeit an den Rändern ergibt sich also

$$\Phi(u) = 0 \quad \text{in} \quad 0 \leqq u \leqq 1,$$

und damit aus (13)

$$\varphi(x) \equiv 0. \tag{19}$$

Kehren wir nun zu den Überlegungen der S. 343 zurück, so ist also zunächst mit (12) und (19)

$$f(x) = \psi(x), \tag{20}$$

und da wegen (α) $f(x) \not\equiv 0$, so ist

$$\psi(x) \not\equiv 0. \tag{21}$$

Es ist aber das STIELTJESsche Integral in (13),

$$\int_0^1 u^x \, d\Psi(u),$$

über eine Sprungfunktion im Sinne von S. 340 und 343 als Belegung, bekanntlich gleich der DIRICHLETschen Reihe, deren Koeffizienten $a_\nu > 0$ die Sprunggrößen von $\Psi(u)$ sind und deren Exponenten λ_ν sich aus den

Sprungstellen ϑ_ν, $0<\vartheta_\nu<1$, ergeben durch $\lambda_\nu=-\lg\vartheta_\nu$ [6]). Die Stetigkeit von $\Psi(u)$ an den beiden Rändern ist eine Folgerung aus den beiden letzten Bedingungen von (α) [7]). Wir haben somit aus (20)

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x}, \tag{22}$$

wo also $\{a_\nu\}$ und $\{\lambda_\nu\}$ zwei, wegen (21) nicht leere Mengen sind, die unserer Funktion durch (13) zugeordnet sind und von denen wir zunächst nur deren Abzählbarkeit wissen. Insbesondere ist wegen der Monotonie und der Beschränktheit von $\Psi(u)$

$$a_\nu \geqq 0, \qquad \sum a_\nu \text{ konvergent}, \qquad 0<\lambda_\nu<\infty, \tag{23}$$

denn es ergibt sich aus der vorletzten Forderung von (α), daß $\lambda_\nu \neq 0$.

Unsere Reihe konvergiert für $x \geqq 0$ und es bleibt noch zu zeigen, daß die Menge $\{\lambda_\nu\}$ keine Häufungspunkte im Inneren von $(0, \infty)$ besitzt. Das beweisen wir indirekt und nehmen an, Λ sei ein Häufungspunkt von links her (= linksseitiger Häufungspunkt), wobei es gleichgültig ist, ob er zur Menge gehört oder nicht. Sodann bilden wir den Ausdruck F unseres Satzes, indem wir für $f(x)$ das Ergebnis (22) einsetzen und erhalten (2). Der weitere Gedankengang geschieht nun in Anlehnung an S. 341 bis 342: Man bildet (5) die Funktion $\Omega(u)$ und kann jetzt aber zu jedem noch so nahe an Λ genommenen $\varkappa_1<\Lambda$ $\left(\text{d.h. also } \frac{1}{\varkappa_1}>\Omega(\Lambda)\right)$ ein λ_σ mit $\Lambda>\lambda_\sigma\in\{\lambda_\nu\}$ so angeben, daß $\frac{1}{\varkappa_1}>\Omega(\lambda_\sigma)>\Omega(\Lambda)$ wird. Es ist insbesondere also $\frac{\lg\frac{\lambda_\sigma}{\Lambda}}{\lambda_\sigma-\Lambda}<\frac{1}{\varkappa_1}$, woraus mit $\lambda_\sigma-\Lambda<0$ folgt, daß in (8) für $\nu=\sigma$ das $>$-Zeichen auftritt. Damit wird aber für *alle* $\varkappa_1$ mit $\varkappa_1<\Lambda$

$$\lim_{n\to\infty} F=\infty, \tag{24}$$

da ja sämtliche Glieder in (2) positiv sind. Dies steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung, es kann also Λ kein linksseitiger Häufungspunkt sein. Daß aber Λ kein Häufungspunkt von rechts (= rechtsseitiger Häufungspunkt) ist, zeigt man genau so, indem man jetzt von der Voraussetzung des $\varkappa_2>\Lambda$ Gebrauch macht. Damit ist der Beweis von Satz 1 vollendet.

§ 2.

Aus dem Satz 1 und dessen Beweis lassen sich nun in einfacher Weise weitere Sätze herleiten, die auf die in der Einleitung aufgeworfene Fragen eingehen, und die wir in diesem Paragraphen zusammenstellen wollen. Zunächst folgen zwei Sätze, die man aus dem Bisherigen fast unmittelbar ablesen kann und die für das hierauf Folgende vorbereitend sind.

[6]) Für den Fall, daß die Sprungstellen sich im Inneren von (0, 1) nicht häufen, folgt dies unmittelbar aus der Definitionsgleichung des STIELTJESschen Integrals. Im Falle einer beliebig abzählbaren Menge $\{\vartheta_\nu\}$ (die z.B. überall dicht sein kann) ist die Richtigkeit obiger Aussage vom Verf. in dem in Fußnote 3, S. 340 zitierten Aufsatz (daselbst S. 283) gezeigt worden.

[7]) Vgl. Fußnote 4, S. 343.

Satz 2. *Es sei $f(x)$ in eine* DIRICHLETsche *Reihe im Sinne von Satz 1 entwickelbar. Dann ist*

$$\Lambda \notin \{\lambda_\nu\} \quad (\text{bzw. } \Lambda \in \{\lambda_\nu\})$$

dann und nur dann, wenn es um Λ eine Umgebung $\mathfrak{U}$ gibt, derart, daß

$$\liminf_{n\to\infty}\left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa}}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}\right) = 0 \quad (\text{bzw. } = a_\nu,\ 0 < a_\nu \leqq C)$$

ist für alle $\varkappa \in \mathfrak{U}$.

Beweis. Wir folgen den Gedankengängen der S. 341 bis 342. Die Notwendigkeit ergibt sich daraus, daß nach Annahme von $\Lambda \notin \{\lambda_\nu\}$ (bzw. von $\Lambda \in \{\lambda_\nu\}$) das durch (6) definierte Intervall I_Ω die Umgebung $\mathfrak{U}$ unseres Satzes liefert, denn aus den dortigen Ausführungen ist ersichtlich, daß jedes $\frac{1}{\varkappa} \in I_\Omega$ zu den Gln. (9) [bzw. (11)] führt. Auch das Umgekehrte ergibt sich sofort, denn aus der obigen Limesbeziehung folgt (9) [bzw. (11)]. Dies kann aber nur dann eintreten, wenn $\Lambda \notin \{\lambda_\nu\}$ (bzw. wenn $\Lambda \in \{\lambda_\nu\}$) ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Aus dem hinreichenden Teil des Beweises von Satz 1 (insbesondere S. 343 bis 346) ist ohne weiteres ersichtlich, daß man, um zu dem Ergebnis (22) zu gelangen, *nur $\varkappa_1 < \Lambda$ oder nur $\varkappa_2 > \Lambda$* vorauszusetzen braucht. Wir wollen dies zusammenfassen zu

Satz 3. *Gilt für eine Funktion $f(x)$, die den Bedingungen* (α) *genügt,*

$$\liminf_{n\to\infty}\left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa}}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}\right) \leqq C$$

für jedes $0 < \Lambda < \infty$ und dazu einem $\varkappa < \Lambda$ (bzw. einem $\varkappa > \Lambda$), dann ist

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x} \tag{22}$$

mit

$$a_\nu \geqq 0, \qquad \sum a_\nu \text{ konvergent}, \qquad 0 < \lambda_\nu < \infty. \tag{23}$$

Wir bemerken noch, daß der Satz 1 den Fall enthält, bei dem die Folge der λ_ν nicht abbricht, wohl aber ein größtes λ_N vorhanden ist. Um nun zu der eingangs besprochenen Exponentialbedingung (1) wieder zurückzukehren, sei daran erinnert, daß eine Anordnung (1) der Exponentenmenge des Satzes 1 dann und nur dann getroffen werden kann, wenn die Folge (λ_ν) nicht abbricht und wenn es darunter einen *kleinsten* Exponenten λ_1 gibt. Wir beweisen jetzt aber einen allgemeineren Satz, der zugleich den Fall eines *größten* Exponenten einschließt.

Satz 4. *Eine gegebene Funktion $f(x)$ möge die Bedingungen des Satzes 1 erfüllen. Innerhalb der damit vorhandenen Menge $\{\lambda_\nu\}$ gibt es dann und nur dann ein kleinstes $\lambda_1 > 0$ (bzw. ein größtes $\lambda_N < \infty$), wenn eine Zahl $\infty > \Lambda_m > 0$ (bzw. eine Zahl $0 < \Lambda_M < \infty$) derart vorhanden ist, daß*

$$\liminf_{n\to\infty}\left(-\frac{e}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\Lambda}\right) = 0$$

ist für alle $0 < \Lambda < \Lambda_m$ (bzw. für alle $\Lambda_M < \Lambda < \infty$).

Beweis. Besitzt eine Reihe einen kleinsten (bzw. einen größten) Exponenten λ_1 (bzw. λ_N), dann wählen wir irgendein Λ_m (bzw. Λ_M) mit $0<\Lambda_m<\lambda_1$ (bzw. mit $\lambda_N<\Lambda_M<\infty$). Aus Satz 2 folgt jetzt für *jedes* Λ mit $0<\Lambda<\Lambda_m$ (bzw. mit $\Lambda_M<\Lambda<\infty$), für welches also insbesondere $\Lambda\notin\{\lambda_\nu\}$ ist, das Behauptete, nachdem man noch $\varkappa=\Lambda$ gesetzt hat. Das Umgekehrte zeigen wir indirekt: Wäre 0 (bzw. ∞) ein Häufungspunkt, dann könnte man zu jedem $0<\Lambda_m$ (bzw. $\Lambda_M<\infty$) ein $\lambda_\sigma\in\{\lambda_\nu\}$ mit $0<\lambda_\sigma<\Lambda_m$ (bzw. mit $\Lambda_M<\lambda_\sigma<\infty$) angeben, so daß in (2) das Glied mit $\nu=\sigma$ gleich $a_\sigma>0$ wäre. Dies würde, insbesondere für $\varkappa=\Lambda$, ergeben $\lim\limits_{n\to\infty} F>0$, und damit einen Widerspruch zur Voraussetzung.

Dieser Satz besagt z.B., daß eine Funktion $f(x)$ dann und nur dann gleich einem Exponentialpolynom ist, wenn es beide Zahlen Λ_m und Λ_M im Sinne dieses Satzes gibt. Die Exponenten einer DIRICHLET-Entwicklung einer Funktion lassen sich dann und nur dann gemäß (1) anordnen, wenn Λ_m, nicht aber Λ_M vorhanden ist.

Nun wollen wir einen Satz formulieren, der Auskunft darüber gibt, wie man zu einer, gemäß Satz 1 *entwickelbaren* Funktion die ihr *zugeordneten* Koeffizienten- und Exponentenmenge erhält.

Satz 5[8]). *Erfüllt eine vorgegebene Funktion $f(x)$ die Bedingungen des Satzes 1 (d.h. sie ist entwickelbar), dann ist*

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{e}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\Lambda}\right)=\begin{cases}0, & \text{wenn } \Lambda\notin\{\lambda_\nu\}\\ a_\nu>0, & \text{wenn } \Lambda\in\{\lambda_\nu\}.\end{cases}$$

Beweis. Da die Funktion eine DIRICHLETsche Reihe im Sinne des Satzes 1 ist, existiert der Limes und es ergibt sich die Behauptung aus Satz 2 mit $\varkappa=\Lambda$.

Die $\{\lambda_\nu\}$ ergeben sich also aus diesem Satz als diejenigen Werte von Λ, für die obiger Ausdruck von 0 verschieden ist, der dann selbst gleich dem zugehörigen Koeffizienten ist. Hier anknüpfend beweisen wir jetzt einen Satz über den größten Koeffizienten einer DIRICHLET-Entwicklung.

Satz 6. *Es gibt mindestens eine Zahl $0<\Lambda<\infty$ derart, daß in* (F) *des Satzes 1 das Gleichheitszeichen auftritt, dann und nur dann, wenn die dortige Konstante C gleich ist dem größten Koeffizienten der* DIRICHLET-*Entwicklung von $f(x)$.*

Beweis. Steht in (F) das =-Zeichen, dann ist die Behauptung aus (10) und (11) ersichtlich. Ebenso folgt auch, wenn man $C=\max\limits_{\nu=1,2,\ldots} a_\nu$ setzt, daß dann das =-Zeichen in (F) für mindestens ein geeignetes Λ eintreten muß.

Aus dem Satz 3 geht nun deutlich hervor, daß man den Satz 1 allgemeiner fassen könnte, und zwar könnte man dort innerhalb der Exponentenmenge *einseitige* Häufungspunkte zulassen. Wir wollen dies zum Ausdruck bringen in

[8]) Dieser Satz ist in einer allgemeineren Form vom Verf. bereits in der in Fußnote 3, S. 340 zitierten Arbeit mit anderen Mitteln bewiesen worden, doch soll er hier der Vollständigkeit halber mit aufgenommen werden.

Satz 7. *Eine vorgelegte Funktion $f(x)$ möge den Bedingungen* (α) *genügen. Es gilt:*

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x} \quad \text{mit} \quad a_\nu \geqq 0, \quad \sum a_\nu \text{ konvergent}, \quad \lambda>0,$$

$\{\lambda_\nu\}$ *ohne linksseitige (bzw. ohne rechtsseitige) Häufungspunkte,*

dann und nur dann, wenn es zu jedem $0<\Lambda<\infty$ eine Zahl $0<\varkappa<\Lambda$ (bzw. eine Zahl $\infty>\varkappa>\Lambda$) derart gibt, daß

$$\text{(F')} \qquad \liminf_{n\to\infty}\left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa}}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}\right)\leqq C$$

ist. Hierbei ist $0<C<\infty$ eine nur von der Funktion abhängige Konstante.

Beweis. Ist eine solche Reihe vorgelegt und ist Λ weder links- noch rechtsseitiger Häufungspunkt von $\{\lambda_\nu\}$, dann gelten im Falle $\Lambda\notin\{\lambda_\nu\}$ für dieses die Beziehungen (3), (3a) und (4), und wie man sich leicht überzeugen kann, sämtliche weiteren Schlüsse der S. 341 bis 342, die dann wieder zu (9) und im Falle $\Lambda\in\{\lambda_\nu\}$ zu (11) führen. Es genügt also, die Beziehung (F') nur noch für den Fall nachzuweisen, daß Λ ein rechtsseitiger (bzw. ein linksseitiger) Häufungspunkt von $\{\lambda_\nu\}$ ist. Aber auch jetzt verläuft der Beweis wie vorhin: Wir nehmen zunächst $\Lambda\notin\{\lambda_\nu\}$ an und bilden den Ausdruck (2) und die Beziehungen (3), (3a) und lassen ferner in (4) nur die *linke* (bzw. nur die *rechte*) Ungleichung bestehen, da es ja nach Voraussetzung ein Λ_l (bzw. ein Λ_r) mit solchen Eigenschaften gibt. Jetzt betrachten wir wieder die Funktion $\Omega(u)$, die das Intervall $\Lambda_l<u<\Lambda$ (bzw. $\Lambda<u<\Lambda_r$) auf ein entsprechendes Intervall I'_Ω (bzw. I''_Ω) abgebildet, das aus (6) entsteht, nachdem man dort $\Lambda_r=\Lambda$ (bzw. $\Lambda_l=\Lambda$) gesetzt hat. Mit einem aus diesem gewählten $\frac{1}{\varkappa}>\frac{1}{\Lambda}$ $\left(\text{bzw. } \frac{1}{\varkappa}<\frac{1}{\Lambda}\right)$ bleiben aber Gln. (7) und, da $\Lambda\neq\lambda_\nu$ ist, auch (8) gültig. Nach derselben Schlußweise wie S. 343 folgt dann auch (9). Ist nun $\Lambda\in\{\lambda_\nu\}$, dann liefert der Ansatz (10) zusammen mit dem soeben Gezeigten, daß (F') besteht. Für den hinreichenden Teil verweisen wir auf Satz 3, und haben nur noch zu zeigen, daß die damit erhaltene Menge $\{\lambda_\nu\}$ keine linksseitigen (bzw. keine rechtsseitigen) Häufungspunkte besitzt. Das folgt indirekt wie S. 346, wobei die Annahme eines einseitigen Häufungspunktes zu (24) und damit zum Widerspruch zur Voraussetzung führt. Damit ist Satz 7 bewiesen.

Wir wollen hier unmittelbar ein später benötigtes Analogon zu Satz 2 anknüpfen.

Satz 8. *Es sei $f(x)$ in eine* DIRICHLETsche *Reihe mit $\lambda_\nu>0$, $a_\nu\geqq 0$, $\sum a_\nu$ konv., entwickelbar, deren Exponentenmenge keine linksseitigen Häufungspunkte besitzt. Dann ist*

$$\Lambda\notin\{\lambda_\nu\} \quad (\text{bzw. } \Lambda\in\{\lambda_\nu\}),$$

dann und nur dann, wenn es um Λ eine linksseitige Umgebung $\mathfrak{U}^l$ gibt, derart, daß

$$\liminf_{n\to\infty}\left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa}}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}\right)=0 \quad (\text{bzw. } =a_\nu, \quad 0<a_\nu\leqq C)$$

ist für alle $\varkappa\in\mathfrak{U}^l$. Entsprechendes gilt, wenn man statt „linksseitig" überall einsetzt „rechtsseitig".

Beweis. Dieser verläuft ganz nach dem Vorbild des Beweises von Satz 2, wobei man nun aber bezüglich des Intervalles I_Ω den Beweis des Satzes 7 zu berücksichtigen hat. Das dortige I'_Ω (entspr. I''_Ω) besitzt, wie ohne weiteres einzusehen ist, die Umgebungseigenschaften des notwendigen Teiles. Für den hinreichenden Teil bemerken wir nur, daß man wieder die Gültigkeit der Gln. (9) [bzw. (11)] folgert, womit dann alles bewiesen ist.

Man könnte jetzt fragen, ob der Satz 7 noch einer weiteren Verallgemeinerung fähig sei, indem man statt $\varkappa < \Lambda$ (bzw. $\varkappa > \Lambda$) etwa $\varkappa = \Lambda$ setzt und nach den Funktionen fragt, für die

$$\liminf_{n\to\infty} \left(-\frac{e}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\Lambda}\right) \leqq C$$

ist für alle $0 < \Lambda < \infty$. In der Tat gehören dann die DIRICHLETschen Reihen mit beliebig abzählbaren Exponenten (die z.B. dicht liegen können) dazu, doch kann man zeigen, daß zu dieser Funktionenklasse dann aber auch *sämtliche* total monotonen [d.h. die Bedingung (α) erfüllenden] Funktionen gehören[9]). Man erkennt also hieran, daß der Übergang von den beliebig abzählbaren zu den spezielleren Exponentenmengen für die obigen Ergebnisse und Methoden von *wesentlicher* Natur ist.

Eine gewisse weitere Lockerung der in unseren Sätzen an die Exponenten gestellten Bedingungen ist aber doch möglich, wenn wir nun von dem bisher behandelten Fall der *zugeordneten* Exponenten übergehen zu einer im Sinne der Einleitung *vorgegebenen* Folge (λ_ν). Zunächst beweisen wir einen Satz, der gewissermaßen zwischen diesen beiden Fragestellungen liegt, bei dem eine vorgegebene Zahlenmenge nicht die Exponenten der DIRICHLET-Entwicklung, wohl aber deren *abgeschlossene Hülle* darstellt.

Satz 9. *Es seien eine Funktion $f(x)$, die den Bedingungen (α) genügt, und eine abgeschlossene und abzählbare Menge positiver Zahlen $\{\bar\lambda_\nu\}$ vorgegeben. Es ist*

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x}, \qquad \textit{mit} \quad a_\nu \geqq 0, \quad \sum a_\nu \textit{ konvergent}, \quad \lambda_\nu > 0,$$

$$\{\bar\lambda_\nu\} \textit{ die abgeschlossene Hülle von } \{\lambda_\nu\},$$

dann und nur dann, wenn es zu jedem Λ mit $0 < \Lambda \notin \{\bar\lambda_\nu\}$, und nur zu diesen Λ, ein $\varkappa_1 < \Lambda$ und ein $\varkappa_2 > \Lambda$ gibt, so daß

$$\text{(F'')} \qquad \liminf_{n\to\infty} \left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa}}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}\right) = 0$$

ist für $\varkappa = \varkappa_1$ und $\varkappa = \varkappa_2$.

Beweis. Es sei eine Reihe vorgegeben, $\{\bar\lambda_\nu\}$ sei die abgeschlossene und abzählbare Hülle der Exponentenmenge, dann bilden wir mit einem $\Lambda \notin \{\bar\lambda_\nu\}$,

[9]) Dies ist vom Verf. in der in Fußnote 3, S. 340 zitierten Arbeit, daselbst S. 277—281, gezeigt worden, ist aber auch unschwer hier aus den Überlegungen S. 343—345 dieses Aufsatzes zu erkennen. Zum Beispiel ist $\frac{1}{1+x}$, $(x \geqq 0)$, eine solche Funktion, die aber keine DIRICHLETsche Reihe ist.

das also kein Häufungspunkt ist von $\{\lambda_\nu\}$, den Ausdruck

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left| \frac{\lambda_\nu}{A} \left(\frac{e^{-\lambda_\nu}}{A} \right)^{1/\varkappa} \right|^n .$$

Es gelten nun für dieses A die Beziehungen der Form (3), (3a) und (4) der S. 341. Damit bleiben aber für *dieses* Intervall (4) die weiteren Schlüsse der S. 341 bis 342 erhalten, so daß aus (8) und (9) dann (F'') folgt. Für ein $A \in \{\bar{\lambda}_\nu\}$ ist nun entweder $A \in \{\lambda_\nu\}$ oder A ist ein nicht zur Menge $\{\lambda_\nu\}$ gehöriger Häufungspunkt.

Im ersten Falle folgt $F > 0$ wieder aus (11), im zweiten Fall erkennt man dasselbe aus S. 346 wegen (24), damit gilt (F'') für genau alle $A \notin \{\bar{\lambda}_\nu\}$, womit der notwendige Teil erledigt ist. Jetzt sei eine abzählbare und abgeschlossene Menge $\{\bar{\lambda}_\nu\}$ und eine Funktion vorgelegt, die (α) und (F'') erfüllt. Es gelten zunächst wegen (α) die gleichen Überlegungen wie S. 343 bis 345, und wir können also, da ja (12) und (13) bestehen bleiben, schließen, daß (15) wieder gilt, jedoch nur für $A \notin \{\bar{\lambda}_\nu\}$. Von der in $0 \leqq u \leqq 1$ *stetigen* Belegungsfunktion $\Phi(u)$ aus (13) können wir damit aussagen, daß an jeder Stelle $u = e^{-A}$ mit $A \notin \{\bar{\lambda}_\nu\}$ zufolge der Überlegung der S. 344 bis 345 der Anfangspunkt eines Konstanzintervalles sich befindet. Die anderen Punkte seien dementsprechend mit $u_\nu = e^{-\bar{\lambda}_\nu}$ bezeichnet. Nun liegen aber nach der Voraussetzung über die Menge $\{\bar{\lambda}_\nu\}$ deren Häufungspunkte H_ν *isoliert*, denen dann in (0, 1) die diskreten Punkte $U_\nu = e^{-H_\nu}$ entsprechen mögen. Wir betrachten jetzt ein zwischen zwei solchen Punkten gelegenes Intervall, etwa $(U_\sigma, U_{\sigma+1})$, und greifen aus den darin befindlichen u_ν zwei aufeinanderfolgende, etwa u_τ und $u_{\tau+1}$ heraus. Wählen wir das A des Satzes so, daß $U_\sigma < u_\tau < u = e^{-A} < u_{\tau+1} < U_{\sigma+1}$ ist und wenden darauf wörtlich dieselben Gedankengänge der S. 345 an, so folgt, daß das bei u beginnende Konstanzintervall bis $u_{\tau+1}$ einschließlich reichen muß. In $(u_{\tau+1}, u_{\tau-2})$ können wir nun das Konstanzintervall beliebig nahe rechts von $u_{\tau+1}$ beginnen lassen, damit wird dieses aber, da $\Phi(u)$ stetig, zur Fortsetzung des vorherigen, und schließlich können wir, so fortfahrend, beliebig nahe an den Punkt $U_{\sigma+1}$ herankommen und damit wieder über diesen hinaus. Demzufolge und mit $\Phi(0) = 0$ ist wieder $\Phi(u) = 0$ in $0 \leqq u \leqq 1$, und mit (19), (20) und (21) ist der gegebenen Funktion eine Menge $\{\lambda_\nu\}$ durch (13) zugeordnet, so daß wieder

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x} \tag{22}$$

wird mit den Eigenschaften (23). Von der Menge $\{\lambda_\nu\}$ bleibt jetzt noch zu zeigen, daß deren abgeschlossene Hülle gleich der gegebenen Menge $\{\bar{\lambda}_\nu\}$ ist. Das ergibt sich folgendermaßen: Es bezeichne $\{\bar{\lambda}_\nu^i\}$ die sicher nicht leere Menge der isolierten Punkte von $\{\bar{\lambda}_\nu\}$. Aus der Voraussetzung folgt für (22) nun leicht, daß für alle $A \in \{\bar{\lambda}_\nu^i\}$ und *nur für diese* A

$$\liminf_{n\to\infty} \left(-\frac{e^{A/\varkappa}}{A} \right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}\right) > 0 \tag{25}$$

ist mit allen $\varkappa<\Lambda$ oder allen $\varkappa>\Lambda$ (oder mit allen $\varkappa$ beider Art), und daß es dabei um jedes $\bar{\lambda}_\nu^i$ eine Umgebung gibt, derart, daß für jedes Λ' aus dieser Umgebung und dazu geeignete $\varkappa_1<\Lambda'$ und $\varkappa_2>\Lambda'$ der obige Limes verschwindet. Bezeichnen wir mit $\{\lambda_\nu^i\}$ die demzufolge nicht leere Menge der isolierten Punkte von $\{\lambda_\nu\}$ und setzen in obigen Ausdruck für $f(x)$ die nur mit diesen $\{\lambda_\nu^i\}$ gebildete Teilreihe unseres Ergebnisses (22) ein, dann gilt dasselbe für

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^i\left[\frac{\lambda_\nu^i}{\Lambda}\left(\frac{e^{-\lambda_\nu^i}}{e^{-\Lambda}}\right)^{1/\varkappa}\right]^n>0.$$

Läßt man hier Λ sämtliche Werte $\bar{\lambda}_\nu^i$ durchlaufen, dann lehrt der Satz 2 zusammen mit (25) und dem darauf Folgenden, daß

$$\{\bar{\lambda}_\nu^i\}=\{\lambda_\nu^i\}$$

ist. Nun ist aber $\{\bar{\lambda}_\nu\}$ die abgeschlossene Hülle der Menge $\{\bar{\lambda}_\nu^i\}$, diese unterscheidet sich aber zufolge der letzten Gleichung von $\{\lambda_\nu\}$ höchstens um die zu der letzteren gehörigen Häufungspunkte. Damit ist aber $\{\bar{\lambda}_\nu\}$ die abgeschlossene Hülle von $\{\lambda_\nu\}$, und der Satz 9 bewiesen.

Die Exponentenmenge dieses Satzes kann also Häufungspunkte, sogar unendlich viele im Inneren von $(0,\infty)$ besitzen, die aber nicht ein ganzes Intervall ausfüllen dürfen; man erhält mit diesem Satz sämtliche DIRICHLETschen Reihen, deren Exponentenmengen alle dieselbe vorgegebene abgeschlossene Hülle haben.

Wir kommen nun zu dem Fall der *vorgegebenen* Exponentenmenge und formulieren einen Satz, bei dem aber die an diese Menge gestellten Forderungen wieder soweit eingeschränkt werden müssen, daß wir ein Analogon zu Satz 7 bekommen:

Satz 10. *Es seien eine Funktion $f(x)$, die den Bedingungen (α) genügt, und eine abzählbare Menge positiver Zahlen $\{\lambda_\nu\}$, die keine linksseitigen (bzw. keine rechtsseitigen Häufungspunkte) hat, vorgegeben. Es ist*

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu e^{-\lambda_\nu x}\quad \textit{mit}\quad a_\nu\geq 0,\quad \sum a_\nu \textit{ konvergent},$$

dann und nur dann, wenn es zu jedem Λ mit $0<\Lambda\notin\{\lambda_\nu\}$, und nur zu solchen Λ, ein $\varkappa<\Lambda$ (bzw. ein $\varkappa>\Lambda$) gibt, derart, daß

$$\liminf_{n\to\infty}\left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa}}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}\right)=0$$

ist.

Beweis. Die Notwendigkeit ist direkt aus Satz 8 abzulesen. Für den hinreichenden Teil folgt, wie beim Beweis von Satz 9, daß (15) nur für $\Lambda\dagger\{\lambda_\nu\}$ gilt. Da jetzt wieder die Häufungspunkte von $\{\lambda_\nu\}$ isoliert sind, so schließen wir, genau wie dort, daß (19) besteht, und mithin ist also

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu e^{-\mu_\nu x}$$

mit den entsprechenden Eigenschaften (23). Es ist jetzt noch zu zeigen, daß $\{\mu_\nu\} = \{\lambda_\nu\}$ ist. Auch das geschieht analog wie beim vorherigen Satz. Aus der Voraussetzung ist ersichtlich, daß für alle $\Lambda \in \{\lambda_\nu\}$ und *nur für diese* Λ

$$\liminf_{n\to\infty}\left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa}}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}\right) > 0$$

ist mit allen $\varkappa < \Lambda$ (bzw. mit allen $\varkappa > \Lambda$) und daß es dabei um jedes λ_ν eine linksseitige (bzw. eine rechtsseitige) Umgebung $\mathfrak{U}^l$ (bzw. $\mathfrak{U}^r$) gibt, derart, daß für jedes Λ' aus $\mathfrak{U}^l$ (bzw. aus $\mathfrak{U}^r$) und dazu geeignetes $\varkappa < \Lambda'$ (bzw. $\varkappa > \Lambda'$) der obige Limes verschwindet. Man zeigt nun, daß $\{\mu_\nu\}$ keine linksseitigen (bzw. keine rechtsseitigen) Häufungspunkte besitzt, und läßt in

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\left[\frac{\mu_\nu}{\Lambda}\left(\frac{e^{-\mu_\nu}}{e^{-\Lambda}}\right)^{1/\varkappa}\right]^n$$

Λ sämtliche λ_ν durchlaufen; es folgt jetzt aus Satz 8, daß $\{\mu_\nu\} = \{\lambda_\nu\}$ ist, womit die Behauptung bewiesen ist.

Wir können die bisherigen Methoden wenigstens zum Teil noch auf den Spezialfall anwenden, bei dem es sich um eine Exponentenmenge handelt, die im ganzen Intervall $(0, \infty)$ *dicht* ist.

Satz 11. *Ist von einer Funktion $f(x)$ bekannt, daß sie eine* DIRICHLET-*Entwicklung besitzt mit $\lambda_\nu > 0$, $a_\nu \geqq 0$, $\sum a_\nu$ konv., so ist deren Exponentenmenge dann und nur dann dicht im ganzen Intervall $(0, \infty)$, wenn*

$$\limsup_{n\to\infty}\left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa}}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}\right) = \infty$$

ist für jedes $0 < \Lambda < \infty$ und jedes $0 < \varkappa \neq \Lambda$.

Beweis. Ist bei einer gegebenen Reihe Λ ein Häufungspunkt der $\{\lambda_\nu\}$, dann ergibt der Beweis S. 346 wieder (24) und damit folgt für alle Λ die Behauptung. Das Umgekehrte zeigen wir indirekt, indem wir annehmen, irgendein Λ sei kein Häufungspunkt von $\{\lambda_\nu\}$. Es würde dann die beiden Intervalle (4) und (6) geben, so daß daselbst wegen (9) bzw. (11) für gewisse $\varkappa$ obiger Ausdruck beschränkt wäre, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Wir haben also bei diesem Satz die Existenz der DIRICHLET-Entwicklung voraussetzen müssen. Will man sich hiervon befreien, dann muß man auf den allgemeinen Entwicklungssatz zurückgehen, der für beliebige DIRICHLETsche Reihen gilt, und ihn mit der obigen Aussage verbinden. Dieser Satz wurde vom Verfasser in der Fußnote 3 zitierten Mitteilung bewiesen.

§ 3.

Zum Abschluß wollen wir als Beispiel die Funktion $f(x) = e^{e^{-x}} - 1$, $x \geqq 0$, behandeln, von der man leicht erkennt, daß sie (α) erfüllt und ferner, wenn man sich die Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion vor Augen hält, daß sie gleich der DIRICHLETschen Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} e^{-\nu x}$ ist. Wir können dies jetzt aber direkt zeigen, indem wir den Satz 1 auf diese Funktion anwenden.

Man hat dann zunächst für die n-te Ableitung[10])

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = (-1)^n e^{e^{-x}} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{C_\nu^{(n)}}{\nu!} e^{-\nu x},$$

wo

$$C_\nu^{(n)} = \nu^n - \binom{\nu}{1}(\nu-1)^n + \binom{\nu}{2}(\nu-2)^n - + \cdots \tag{26}$$

ist. Wir wählen ein beliebiges positives Λ, zunächst aber so, daß $\Lambda \neq 1, 2, 3, \ldots$ ist, etwa

$$i-1 < \Lambda < i, \tag{27}$$

wo i eine natürliche Zahl ist. Damit bilden wir

$$F = e^{e^{-\frac{n}{\varkappa}} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{C_\nu^{(n)}}{\nu!} \left(\frac{e^{\frac{\Lambda-\nu}{\varkappa}}}{\Lambda} \right)^n}$$

und zeigen jetzt die Existenz des $\varkappa_1$ und des $\varkappa_2$ des Satzes 1.

Wir definieren eine Funktion $v(u)$ für $u > 0$ durch $v(u) = \frac{u}{\varkappa} - \lg u$, wo $\varkappa$ eine positive Zahl ist mit

$$\Lambda > \varkappa \in (i-1, i). \tag{28}$$

Diese Funktion ist positiv und hat genau ein Minimum, und zwar an der Stelle $u_m = \varkappa$, so daß ersichtlich $v(\varkappa) < v(\nu)$ ist für alle $\nu = 1, 2, 3, \ldots$. Wählen wir nun $\varkappa$ nah genug an Λ, dann können wir es wegen der Stetigkeit von $v(u)$ so einrichten, daß auch $v(\Lambda) < v(\nu)$ ist, ebenfalls für alle $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, und erhalten aus dem obigen

$$\frac{\Lambda}{\varkappa} - \lg \Lambda < \frac{\nu}{\varkappa} - \lg \nu, \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{e^{\frac{\Lambda-\nu}{\varkappa}}}{\Lambda} < \frac{1}{\nu};$$

und wegen (27) und (28) kann man sogar eine von ν unabhängige Zahl $0 < \alpha < 1$ so angeben, daß

$$\frac{e^{\frac{\Lambda-\nu}{\varkappa}}}{\Lambda} \leq \frac{\alpha}{\nu} \text{ ist für alle } \nu = 1, 2, 3, \ldots.$$

Damit wird aus der obigen Gleichung für F

$$F \leq e^{e^{-\frac{n}{\varkappa}} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{C_\nu^{(n)}}{\nu!} \left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^n} \leq e^{e^{-\frac{n}{\varkappa}} n \frac{C_N^{(n)}}{N!} \left(\frac{\alpha}{N}\right)^n},$$

wo $N = N(n)$ eine natürliche Zahl ist mit $1 \leq N \leq n$, derart, daß

$$\frac{C_N^{(n)}}{N!} \left(\frac{\alpha}{N}\right)^n = \max_{\nu = 1, 2, \ldots, n} \frac{C_\nu^{(n)}}{\nu!} \left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^n$$

ist. Mit (26) wird dann

$$F \leq e^{e^{-\frac{n}{\varkappa}} \frac{n}{N!} \left(\frac{\alpha}{N}\right)^n \left[N^n - \binom{N}{1}(N-1)^n + \binom{N}{2}(N-2)^n - + \cdots \right]}$$

[10]) Vgl. etwa Bd. II, S. 25/26 des in Fußnote 5, S. 343 zitierten Werkes.

und mit

$$\binom{N}{\sigma}(N-\sigma) = \max_{\tau=0,1,2,\ldots,N-1}\binom{N}{\tau}(N-\tau)^n, \qquad 0 \leq \sigma \leq N-1 < n$$

wird

$$F \leq e^{e^{-\frac{n}{\varkappa}}} \frac{n}{N!}\left(\frac{\alpha}{N}\right)^n \left|\binom{N}{\sigma}(N-\sigma)\right|^n N.$$

Der erste Faktor der rechten Seite dieser Beziehung strebt bei jedem $\varkappa > 0$ mit wachsendem n gegen 1, ferner ist $\left(\frac{N-\sigma}{N}\right)^n \leq 1$ und $\frac{1}{N!}\binom{N}{\sigma}$ bleibt für jedes n beschränkt. Sei K eine positive Konstante, so daß wir mit $N \leq n$ schließlich erhalten

$$F \leq K n^2 \alpha^n,$$

wo aber die rechte Seite wegen $0 < \alpha < 1$ mit wachsendem n gegen 0 strebt. Entsprechendes folgt nun, wenn man oben ein $\varkappa > \Lambda$ annimmt, so daß also $\lim_{n\to\infty} F = 0$ ist für $\Lambda \neq 1, 2 \ldots$, mit den entsprechenden $\varkappa_1 < \Lambda$ und $\varkappa_2 > \Lambda$.

Es bleibt noch der Fall zu diskutieren, wo Λ gleich einer natürlichen Zahl ist. Sei also $\Lambda = i \geq 1$ gewählt, dann haben wir

$$F = e^{e^{-\frac{n}{\varkappa}}} \frac{C_i^{(n)}}{i!} \cdot \frac{1}{i^n} + e^{e^{-\frac{n}{\varkappa}}} \sum_{\nu=1}^{n}{}' \frac{C_\nu^{(n)}}{\nu!}\left(e^{\frac{i-\nu}{\varkappa}}\right)^n,$$

wo aber im zweiten Summanden $\nu \neq i$ ist und dieser mit wachsendem n gegen 0 strebt, da man sämtliche soeben gemachten Schlüsse auf diesen anwenden kann. Der erste Faktor des ersten Summanden strebt wiederum gegen 1. Mit (26) haben wir jetzt

$$\frac{C_i^{(n)}}{i!}\frac{1}{i^n} = \frac{1}{i!}\left[1 - \binom{i}{1}\left(\frac{i-1}{i}\right)^n + \binom{i}{2}\left(\frac{i-2}{i}\right)^n - + \cdots\right].$$

In der eckigen Klammer stehen aber endlich viele Glieder, deren Anzahl von n unabhängig ist und ferner sind die in den runden Klammern stehenden Ausdrücke < 1. Damit bekommt man $\lim_{n\to\infty} F = \frac{1}{i!} \leq 1$. Unsere Funktion ist also entwickelbar mit der Exponentenmenge $\{\nu\}$ und mit den Koeffizienten $1/\nu!$, $\nu = 1, 2 \ldots$; der Satz 6 ergibt dann $C = 1$ mit $\Lambda = 1$.

München, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 17. August 1953.)

Weier, J.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 356—374 (1954)

Normale Abbildungsscharen.

Von
Josef Weier.

Es bezeichne K einen endlichen simplizialen Komplex, der in einem Euklidischen Zahlenraum liegt, und P das durch K bestimmte Polyeder. Der Komplex K sei überdies zusammenhängend, und es zerlege kein Eckpunkt von K seine Umgebung; K sei, wie wir auch sagen werden, eindimensional zusammenhängend.

Dann besagt ein bekannter Satz[1]: Ist f die Identität von P, also $p = f(p)$ für alle Punkte p von P, so existiert eine Schar $(f^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von P in sich mit $f^0 = f$ und der Eigenschaft, daß f^1 genau einen Fixpunkt hat.

Diesen Satz wollen wir wie folgt verschärfen. Es existieren Kurven $(q_i^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$, $i = 1, \ldots, m$, und eine Schar $(f^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von P in sich mit $f^0 = f$ und den Eigenschaften: für $0 < \tau < 1$ sind die paarweis verschiedenen Punkte $q_1^\tau, \ldots, q_m^\tau$ die Fixpunkte der Abbildung f^τ; die Abbildung f^1 hat genau einen Fixpunkt q, und es ist $q_i^1 = q$ für $i = 1, \ldots, m$.

Der vorstehende Satz wird überdies in verschiedener Richtung abgewandelt und ergänzt. Näherhin ist das Ziel der vorliegenden Arbeit zu zeigen, daß man auch an den Weg, auf dem eine Abbildung in eine zu ihr homotope Abbildung mit der Mindestzahl von Fixpunkten der zugehörigen Abbildungsklasse überführt wird, Forderungen stellen kann bezüglich einer übersichtlichen Art, in welcher die Fixpunkte einer Fixpunktklasse auf einen Fixpunkt zusammengezogen werden. Eine Abbildungsschar, die die Fixpunkte in der oben gekennzeichneten Weise zusammenführt, haben wir in der Überschrift als „normal" bezeichnet.

Bemerkt sei noch, daß man — nach geeigneter Abänderung der über den Komplex K gemachten Voraussetzungen — die folgenden Untersuchungen ohne größere Schwierigkeiten auch auf beliebige Abbildungsklassen ausdehnen kann.

1. Doppelpunktfreie Abbildungsscharen.

Zu den benutzten Bezeichnungen sei folgendes bemerkt. Die vorkommenden Mengen sind im allgemeinen mit großen lateinischen Buchstaben, ihre Elemente mit kleinen lateinischen Buchstaben gekennzeichnet. Für reelle Zahlen verwenden wir neben kleinen lateinischen auch griechische Buchstaben. Sind a, b die Punkte $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ eines n-dimensionalen Euklidischen Zahlenraumes R^n, so bedeutet $a + b$ den Punkt $(\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$

[1]) Wenn P eine Mannigfaltigkeit ist, vergleiche man H. Hopf: Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **96**, 225—250 (1926).

und $\overrightarrow{a\,b}$ den Vektor $\{\beta_1-\alpha_1, \ldots, \beta_n-\alpha_n\}$. Sind $a_1, \ldots, a_r$ Punkte des R^n, so bezeichnet $\overline{a_1 \ldots a_r}$ die konvexe Hülle der Punkte $a_1, \ldots, a_r$; lineare Unabhängigkeit der Punkte $a_1, \ldots, a_r$ setzen wir dabei nicht voraus. „Simplexe" im R^n schlechthin sind stets abgeschlossen und gradlinig. Unter einem „endlichen simplizialen Komplex" im R^n verstehen wir eine endliche Menge K von Simplexen S des R^n mit den Eigenschaften: der Durchschnitt zweier S aus K gehört zu K; mit S gehört jede Seite von S zu K. Für das Simplex S bezeichnet $I(S)$ das Innere bezüglich seiner Trägerebene von S. Sind M und N Mengen des R^n mit $M \subset N$, so ist $B(M;N)$ die in bezug auf N gebildete Begrenzung von M.

Für diesen Abschnitt bezeichne K einen beliebigen endlichen simplizialen Komplex, der in einem Euklidischen Raum liegt, und P das durch K bestimmte Polyeder. Ist dann f die Identität von P, also die durch $f(p)=p$, $p \in P$, erklärte Abbildung von P in sich und ε eine positive Zahl, so existiert einem bekannten Satz zufolge eine zu f homotope Abbildung f', die von f um weniger als ε entfernt ist und die nur endlich viele Fixpunkte hat. Dieses Ergebnis wollen wir verschärfen zu

Satz I. *Ist f die Identität von P und ε eine positive Zahl, so gibt es Punkte $q_1, \ldots, q_m$ in P und eine Schar $(f^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von P in sich mit $f^0 = f$, $\varrho(f, f^\tau) < \varepsilon$, $0 \leq \tau \leq 1$, und der Eigenschaft, daß für $0 < \tau \leq 1$ die Punkte $q_1, \ldots, q_m$ die Fixpunkte der Abbildung f^τ sind.*

Beweis. Man kann annehmen, daß die Durchmesser der Simplexe von K sämtlich kleiner als $\varepsilon/2$ sind. Zwei Punkte p_1 und p_2 aus P, deren zu K gehörige Trägersimplexe einen nicht leeren Durchschnitt haben, bezeichnen wir als in „benachbarten Simplexen von K liegende Punkte". Dann sei ω eine positive Zahl, so daß jedes Punktpaar (p_1, p_2) aus P mit $\varrho(p_1, p_2) < \omega$ in benachbarten Simplexen von K liegt; und f' eine stetige Abbildung von P in sich mit $\varrho(f, f') < \omega$ und nur endlich vielen Fixpunkten. Die letzteren nennen wir $q_1, \ldots, q_m$.

Zum Beweis von Satz I braucht es dann offenbar nur den Nachweis der Existenz einer für alle (p_1, p_2, τ), p_1 und p_2 in benachbarten Simplexen von K liegende Punkte aus P und τ eine Zahl aus $[0, 1]$, erklärten stetigen Abbildung h in P mit den folgenden Eigenschaften 1. bis 4.

1. In allen (p_1, p_2) ist $h(p_1, p_2, 0) = p_1$ und $h(p_1, p_2, 1) = p_2$.

2. Es ist $h(p_1, p_2, \tau) = p_1$ für $0 \leq \tau \leq 1$, wenn $p_1 = p_2$.

3. Für alle (p_1, p_2, τ) liegen die Punkte p_1 und $h(p_1, p_2, \tau)$ in benachbarten Simplexen von K.

4. Es ist $h(p_1, p_2, \tau_1) \neq h(p_1, p_2, \tau_2)$ in allen $(p_1, p_2, \tau_1, \tau_2)$ mit $p_1 \neq p_2$ und $\tau_1 \neq \tau_2$.

Sind p, p_1, p_2 Punkte aus P, so bezeichnen wir $\overline{p_1 p} + \overline{p p_2}$ als einen „doppelpunktfreien" Streckenzug, wenn $\overline{p_1 p} \cdot \overline{p p_2} = p$. Dabei lassen wir auch die Fälle zu, daß $p = p_1 = p_2$ oder $p = p_1$ und $p_1 \neq p_2$ oder $p = p_2$ und $p_1 \neq p_2$ ist.

Ist Q die Menge aller in benachbarten Simplexen von K liegenden Punktpaare (p_1, p_2) aus P und a eine stetige Abbildung von Q in P mit den im nachstehenden Satz I′ angeführten Eigenschaften, so wird eine stetige

Abbildung h der Menge aller (p_1, p_2, τ), (p_1, p_2) ein Punkt aus Q und τ eine Zahl aus $[0, 1]$, in P bestimmt, von der die obigen Aussagen 1. bis 4. gelten, wenn für jedes (p_1, p_2) aus Q die Strecke $[0, 1]$ auf den Streckenzug

$$\overline{p_1 h(p_1, p_2)} + \overline{h(p_1, p_2) p_2}$$

abgebildet wird durch $h(p_1, p_2, 0) = p_1$, $h(p_1, p_2, 1) = p_2$ und lineare Fortsetzung für die übrigen Zahlen aus $[0, 1]$.

Mithin, es genügt, statt Satz I zu zeigen:

Satz I'. *Es gibt eine für alle (p_1, p_2), p_1 und p_2 in benachbarten Simplexen von K liegende Punkte aus P, erklärte stetige Abbildung a in P mit den Eigenschaften:*

$$\text{für} \quad p_1 = p_2 \quad \text{ist} \quad a(p_1, p_2) = p_1;$$

ist $T(p_1)$ das Trägersimplex von p_1 und $T(p_2)$ das von p_2, so liegt der Punkt $a(p_1, p_2)$ im Innern des Simplexes $T(p_1) \cdot T(p_2)$; der Streckenzug $\overline{p_1 a(p_1, p_2)} + \overline{a(p_1, p_2) p_2}$ ist doppelpunktfrei.

Beweis. Sind $p_1 = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n})$ und $p_2 = (\alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2n})$ Punkte aus P, so betrachten wir das Punktpaar (p_1, p_2) auch als den Punkt $(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2n})$. Dann ist die Entfernung zweier (p_1, p_2) erklärt. Sind P_1 und P_2 Teilmengen aus P, so bezeichne (P_1, P_2) die Menge aller (p_1, p_2) mit $p_1 \in P_1$ und $p_2 \in P_2$. Abgeschlossene Hülle, Begrenzung usw. von Mengen (P_1, P_2) sind stets bezüglich (P, P) gebildet, wo die Bezugsmenge nicht besonders angegeben ist.

Mit Q bezeichnen wir die Menge aller (p_1, p_2) aus (P, P), für die p_1 und p_2 in benachbarten Simplexen aus K liegen. Für $p \in P$ sei $T(p)$ das Trägersimplex von p in K. Weiter seien für alle p aus P, wenn e_i die Eckpunkte von K sind, die Zahlen $\lambda_i^0(p)$ durch

$$p = \sum \lambda_i^0(p)\, e_i, \qquad \sum \lambda_i^0(p) = 1, \qquad \lambda_i^0(p) \geq 0, \qquad \lambda_i^0(p) = 0 \text{ für } e_i \notin T(p)$$

bestimmt. Wir ordnen die Simplexe von K derart in eine Folge $S^1, \ldots, S^m, S^{m+1}, \ldots, S^{m'}$, daß $\dim S^m = 0$, $\dim S^{m+1} = 1$ und $\dim S^i \leq \dim S^{i+1}$ für $i = 1, \ldots, m' - 1$.

Hierauf bezeichnen wir für alle Punkte (p_1, p_2) aus der Menge Q mit $a^m(p_1, p_2)$ den Punkt

$$\sum \lambda_i^0(p_1)\, \lambda_i^0(p_2)\, e_i / \sum \lambda_i^0(p_1)\, \lambda_i^0(p_2).$$

Da die Abbildungen λ_i^0 stetig sind, ist die Abbildung a^m stetig. Es gilt:

I^m. Für $p_1 = p_2$ ist $a^m(p_1, p_2) = p_1$.

II^m. Es liegt $a^m(p_1, p_2)$ im Innern von $T(p_1) \cdot T(p_2)$.

III^m. In allen (p_1, p_2), für die $T(p_1)$ wie $T(p_2)$ unter den Simplexen $S^1, \ldots, S^m$ vorkommt, ist der Streckenzug $\overline{p_1 a^m(p_1, p_2)} + \overline{a^m(p_1, p_2) p_2}$ doppelpunktfrei.

Wir machen nun die Annahme, es sei $r - 1$ eine natürliche Zahl $\geq m$ und bereits eine stetige Abbildung a^{r-1} von Q in P erklärt mit I^{r-1} bis III^{r-1}. Dann wollen wir die Existenz einer stetigen Abbildung a^r von Q in P nachweisen, von der I^r bis III^r gilt.

Zu diesem Ende seien V die Menge aller Punkte p aus P mit $S^r \subset T(p)$ und S das Innere von S^r. Es sei A die Menge aller Punkte (p_1, p_2) von (S, S), in denen der Punkt $a^{r-1}(p_1, p_2)$ von p_1 wie p_2 gleichen Abstand hat. Für $i = 1, 2$ bedeute A_i die Menge aller Punkte (p_1, p_2) von (S, S), in denen der Punkt $a^{r-1}(p_1, p_2)$ von p_i kleineren Abstand als vom anderen der beiden Punkte p_1 und p_2 hat. Weiter bezeichne A_i^0 für $i = 1, 2$ die Menge aller (p_1, p_2) von A_i, in denen $a^{r-1}(p_1, p_2)$ auf der Geraden durch $\overline{p_1 p_2}$ liegt und zu $\overline{p_1 p_2}$ fremd ist. Die Menge A_i ist in $\overline{(S, S)}$ offen; ihre bezüglich $\overline{(S, S)}$ gebildete Begrenzung nennen wir B_i. Sind p ein Punkt aus V, e_i^1 die Eckpunkte von S^r, e_i^2 die von den e_i^1 verschiedenen Eckpunkte von $T(p)$ und

$$p = \sum \lambda_i^1 e_i^1 + \sum \lambda_i^2 e_i^2, \qquad \sum \lambda_i^1 e_i^1 + \sum \lambda_i^2 e_i^2 = 1, \qquad \lambda_i^k > 0,$$

so bezeichne p' den Punkt $\sum \lambda_i^1 e_i^1 / \sum \lambda_i^1$.

Es ist

(1) $$a^{r-1}(p_1, p_2) = p_i \quad \text{für} \quad (p_1, p_2) \in B_i \cdot \bar{A}_i^0.$$

Falls $p_1 = p_2$, ist (1) sicher richtig. Nun sei $p_1 \neq p_2$ und G die Gerade durch p_1 und p_2. Wegen $(p_1, p_2) \in \bar{A}_i^0$ und der Bedeutung von A_i^0 ist

(*) $$a^{r-1}(p_1, p_2) \in \overline{G - \overline{p_1 p_2}}.$$

Wäre erstens (p_1, p_2) in (S, S) gelegen, so folgte aus (*), daß eine ganze Umgebung von (p_1, p_2) zu A_i gehörte, obschon doch (p_1, p_2) in $B_i = \bar{A}_i - A_i$ liegt. Auch der zweite Fall, daß p_i in S und der von p_i verschiedene der Punkte p_1 und p_2, den wir auch mit p_j bezeichnen auf, $\bar{S} - S$ liegt, ist nicht möglich. Denn in diesem Falle läge der Punkt $a^{r-1}(p_1, p_2)$ auf $\bar{S} - S$ und wäre wegen (*) daher gleich p_j, während doch die Entfernung des Punktes $a^{r-1}(p_1, p_2)$ von p_i nicht kleiner ist als die von p_j. Drittens liege p_i auf $\bar{S} - S$ und p_j in S. Hier folgt (1) aus $a^{r-1}(p_1, p_2) \in \bar{S} - S$ und (*). Viertens sei p_1 wie p_2 auf $\bar{S} - S$ gelegen. In diesem Fall ergibt sich (1) aus (*) und III^{r-1}.

Es ist

(2) $$\overline{(S, S)} = (\bar{S}, \bar{S}) = \bar{A} + \bar{A}_1 + \bar{A}_2.$$

Ist q ein Punkt aus $(\bar{S}, \bar{S})$, so gibt es eine Folge $q_1, q_2, \ldots$ von Punkten q_i aus (S, S), die auf q konvergiert. In mindestens einer der Mengen A, A_1, A_2 liegt eine Teilfolge $q_1^*, q_2^*, \ldots$ der Folge $q_1, q_2, \ldots$, woraus (1) folgt.

Für $i = 1, 2$ ordnen wir jedem Punkt $q = (p_1, p_2)$ aus $\bar{A}_i$ eine Zahl $\lambda_i(q)$ aus $[0, 1]$ zu. Und zwar sei $\lambda_i(q)$ gleich

$$\varrho(q, B_i - \bar{A}_i^0) / \left(\varrho(q, B_i - \bar{A}_i^0) + \varrho(q, \bar{A}_i^0)\right),$$

wenn $\varrho(q, B_i - \bar{A}_i^0) + \varrho(q, \bar{A}_i^0) > 0$; sonst gleich 0. Die Funktion λ_i ist unstetig nur in den gemeinsamen Häufungspunkten von $B_i - \bar{A}_i^0$ und $\bar{A}_i^0$, also auf der Menge $\overline{B_i - \bar{A}_i^0} \cdot \bar{A}_i^0$.

Ebenso ordnen wir jedem Punkt $q = (p_1, p_2)$ aus der Menge (V, V) eine Zahl $\mu(q)$ zu. Wir bezeichnen (V, V) auch mit V^* und (S, S) auch mit S^*.

Dann sei $\mu(q)$ gleich

$$\varrho(q, \overline{V}^* - V^*)/(\varrho(q, \overline{V}^* - V^*) + \varrho(q, S^*)).$$

Die Abbildung μ ist stetig.

Hierauf weisen wir jedem Punkt $q = (p_1, p_2)$ von Q wie folgt einen Punkt $a^r(q)$ aus P zu: Es sei $a^r(q)$ gleich

$$a^{r-1}(q) \tag{3}$$

für alle q aus $Q - (V, V)$ und ebenso für alle q aus $\bar{A}$; gleich

$$(1 - \lambda_i(q))\, a^{r-1}(q) + \lambda_i(q)\, p_i \tag{4}$$

für die Punkte q von $\bar{A}_i$, $i = 1, 2$; gleich

$$(1 - \mu(q))\, a^{r-1}(q) + \mu(q)\, a^r(p_1', p_2') \tag{5}$$

für die q aus $(V, V) - \overline{(S, S)}$.

Zum Nachweis, daß die Abbildung a^r von Q in P eindeutig ist, genügt es, die Eindeutigkeit von a^r auf den Mengen $\bar{A} \cdot \bar{A}_1$, $\bar{A} \cdot \bar{A}_2$, $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2$ und $(\bar{S} - S, \bar{S} - S) \cdot (\bar{A}_1 + \bar{A}_2)$ zu prüfen. Diese Mengen sind bzw. gleich $\bar{A} \cdot B_1$, $\bar{A} \cdot B_2$, $B_1 \cdot B_2$ und $(\bar{S} - S, \bar{S} - S) \cdot (B_1 + B_2)$. Alsdann braucht es nur noch den Nachweis, daß

$$(1 - \lambda_i(q))\, a^{r-1}(q) + \lambda_i(q)\, p_i = a^{r-1}(q) \tag{$*_*$}$$

für die Punkte $q = (p_1, p_2)$ aus B_i; $i = 1, 2$. Für $q \in B_i - \bar{A}_i^0$ folgt ($*_*$) aus $\lambda_i(q) = 0$, für $q \in B_i \cdot \bar{A}_i^0$ aus (1).

Bezeichnet a_i^r die durch $a_i^r(q) = a^r(q)$, $q \in \bar{A}_i$, bestimmte Abbildung von $\bar{A}_i$ in P, so ist a_i^r auf $\bar{A}_i$ stetig: Die Abbildung λ_i ist nur in den Punkten der Menge $\overline{B_i - \bar{A}_i^0} \cdot \bar{A}_i^0$ unstetig. Die letztere Menge ist aber in $B_i \cdot \bar{A}_i^0$ enthalten. Daher folgt die Behauptung aus (1) und (4).

Aus der Eindeutigkeit von a^r sowie (4) und ($*_*$) ergibt sich, daß

$$a^r(q) = a^{r-1}(q) \quad \text{für} \quad q \in B_i; \tag{6}$$

und hieraus, daß

$$a^r(q) = a^{r-1}(q) \quad \text{für} \quad q \in \overline{(S, S)} - (S, S). \tag{7}$$

Wir bezeichnen mit a_0^r die durch $a_0^r(q) = a^r(q)$, $q \in \overline{(S, S)}$, bestimmte Abbildung von $\overline{(S, S)}$ in P. Dann folgt aus (6) die Stetigkeit von a_0^r.

Die Abbildung a^r ist stetig: Wegen der Stetigkeit von μ und a_0^r ist a^r auf (V, V) stetig. Verbleibt, die Stetigkeit von a^r in den Punkten q aus $\overline{(V, V)} - (V, V)$ zu prüfen. Und diese ergibt sich leicht aus (7).

Zum Nachweis, daß I^r bis III^r über a gilt, bedarf es nur noch einer Prüfung von III^r. Es sei also (p_1, p_2) ein Punkt aus Q, für den die Simplexe $T(p_1)$ und $T(p_2)$ unter den Simplexen $S^1, \ldots, S^r$ vorkommen. Erstens möge $T(p_1)$ wie $T(p_2)$ bereits unter den Simplexen $S^1, \ldots, S^{r-1}$ enthalten sein. Hier folgt III^r aus $a^r(p_1, p_2) = a^{r-1}(p_1, p_2)$ und der als richtig angenommenen Aussage III^{r-1}. Liegt der erste Fall nicht vor, so ist wenigstens einer der Punkte p_1 und p_2 im Innern von S^r gelegen. Das folgt aus

$\bar{S} - S \subset S^1 + \cdots + S^{r-1}$. Es liege zweitens der eine der Punkte p_1 und p_2 in S und der andere in $S^1 + \cdots + S^{r-1}$. Dann ist $a^r(p_1, p_2)$ in $\bar{S} - S$ gelegen und also III^r richtig. Drittens befinde sich p_1 wie p_2 in S. Hier folgt III^r aus der Erklärung von $A_1^0 + A_2^0$ und daraus, daß dann $a^r(p_1, p_2)$ gleich einem der Punkte p_1 und p_2.

Für $r = m'$ gilt $\mathrm{I}^{m'}$, $\mathrm{II}^{m'}$ und $\mathrm{III}^{m'}$, womit Satz I' bewiesen ist.

Dem bisher Gesagten entnimmt man folgenden in den Abschnitten 2, 3 und 4 benutzten

Hilfssatz. *Es sei K ein endlicher simplizialer Komplex, der in einem Euklidischen Raum liegt, und P das durch K bestimmte Polyeder. Dann gibt es eine für alle (p_1, p_2, τ), p_1 und p_2 in benachbarten Simplexen von K liegende Punkte aus P und τ eine Zahl aus $[0, 1]$, erklärte stetige Abbildung h in P mit den Eigenschaften: $h(p_1, p_2, 0) = p_1$ und $h(p_1, p_2, 1) = p_2$; $h(p_1, p_2, \tau) = p_1$ für $0 \leqq \tau \leqq 1$, wenn $p_1 = p_2$; ist $T(p_1)$ das Trägersimplex von p_1 und $T(p_2)$ das von p_2, so gibt es im Innern von $T(p_1) \cdot T(p_2)$ einen Punkt q derart, daß $h(p_1, p_2, \tau)$ in $\overline{p_1 q} + \overline{q p_2}$ liegt für $0 \leqq \tau \leqq 1$;*

$$h(p_1, p_2, \tau_1) \neq h(p_1, p_2, \tau_2)$$

in allen $(p_1, p_2, \tau_1, \tau_2)$ mit $p_1 \neq p_2$ und $\tau_1 \neq \tau_2$.

2. Normale Abbildungsscharen im Kleinen.

Ist P ein Polyeder, f eine stetige Abbildung von P in sich, q ein Fixpunkt von f und V eine in P offene Menge derart, daß $q \in V$ der einzige Fixpunkt von f auf $\bar{V}$, so heißt q ein „isolierter" Fixpunkt von f; ist überdies V zu einer Vollkugel homöomorph, so heißt q ein „regulärer" Fixpunkt. Ist q isoliert und existiert eine Strecke S mit $f(\bar{V}) \subset S$, so bezeichnen wir q als einen „linearen" Fixpunkt.

Über Fixpunkte vom Index Null ist folgender Satz bekannt: Ist V eine offene n-dimensionale Vollkugel in dem Euklidischen Raum R^n, $n > 0$, q ein Punkt aus V und f eine stetige Abbildung von $\bar{V}$ in den R^n mit $p \neq f(p)$, $p \in \bar{V} - q$, und q als Fixpunkt vom Index Null, so gibt es eine Schar $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von $\bar{V}$ in den R^n, von der gilt: es ist $f^\tau(p) = f(p)$ in allen (p, τ), für die entweder $p \in \bar{V}$ und $\tau = 0$ oder $p \in \bar{V} - V$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$; die Abbildung f^1 hat keinen Fixpunkt. Diesen Satz wollen wir verschärfen zu

Satz 1. *Es sei V eine offene n-dimensionale Vollkugel im R^n, $n > 0$, und q ein Punkt aus V; f eine stetige Abbildung von $\bar{V}$ in den R^n mit $p \neq f(p)$, $p \in \bar{V} - q$, und q als Fixpunkt vom Index Null. Dann existiert eine Schar $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von $\bar{V}$ in den R^n mit den Eigenschaften: $f^\tau(p) = f(p)$ in allen (p, τ), für die entweder $p \in \bar{V}$ und $\tau = 0$ oder $p \in \bar{V} - V$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$; für $0 < \tau \leqq 1$ hat die Abbildung f^τ keinen Fixpunkt.*

Beweis. Man kann annehmen, daß q der Mittelpunkt von V ist. Für $0 < \sigma \leqq 1$ sei V^σ die offene n-dimensionale Vollkugel im R^n mit q als Mittelpunkt und $\sigma \cdot \varrho(q, \bar{V} - V)$ als Radius. In allen Punkten p aus $\bar{V} - q$ bezeichne $w(p)$ die Projektion von p auf $\bar{V} - V$ aus q. Für $0 < \sigma \leqq 1$ sei w^σ

die durch $w^\sigma(p)=w(p)$, $p\in\overline{V}^\sigma-V^\sigma$, bestimmte affine Abbildung von $\overline{V}^\sigma$ auf $\overline{V}$. Es bezeichne f' eine stetige Abbildung von $\overline{V}$ in den R^n, die auf $\overline{V}-V$ mit f übereinstimmt und die keinen Fixpunkt hat.

Zur Erklärung der Abbildungsschar $(f^\tau,\ 0\leqq\tau\leqq 1)$ sei zunächst $f^0=f$. Es bezeichne ζ eine Zahl aus $(0,1]$. Für $p\in\overline{V}-V^\zeta$ sei dann

$$f^\zeta(p)=f(p); \tag{1}$$

für $p\in\overline{V}^\sigma-V^\sigma$, $\zeta\geqq\sigma\geqq\zeta\,\zeta$, weiter

$$f^\zeta(p)=p+\frac{\sigma}{\zeta}\overrightarrow{w^{\lambda(\zeta,\sigma)}(p)\,f\,w^{\lambda(\zeta,\sigma)}(p)} \tag{2}$$

mit $\lambda(\zeta,\sigma)=\dfrac{\zeta\zeta-1}{\zeta-1}\cdot\dfrac{\sigma}{\zeta}-\dfrac{\zeta\zeta-\zeta}{\zeta-1}$; für $p\in V^{\zeta\zeta}$ schließlich

$$f^\zeta(p)=p+\zeta\overrightarrow{w^{\zeta\zeta}(p)\,f'\,w^{\zeta\zeta}(p)}. \tag{3}$$

Zum Nachweis der Stetigkeit der Abbildung f^ζ, ζ eine Zahl aus $(0,1]$, genügt es zu zeigen, daß (1) und (2) auf $\overline{V}^\zeta-V^\zeta$ sowie (2) und (3) auf $\overline{V}^{\zeta\zeta}-V^{\zeta\zeta}$ übereinstimmen: Für $p\in\overline{V}^\zeta-V^\zeta$ ist (2) zufolge $f^\zeta(p)$ der Punkt $p+\overrightarrow{p^*f(p^*)}$ mit $p^*=w^{\lambda(\zeta,\zeta)}(p)$, wegen $\lambda(\zeta,\zeta)=1$ und $w^1(p)=p$ daher (2) mit (1) übereinstimmend. In den p von $\overline{V}^{\zeta\zeta}-V^{\zeta\zeta}$ ist (2) zufolge $f^\zeta(p)$ der Punkt $p+\zeta\overrightarrow{p^{**}f'(p^{**})}$ mit $p^{**}=w^{\lambda(\zeta,\zeta\zeta)}(p)$, wegen $\lambda(\zeta,\zeta\,\zeta)=\zeta\,\zeta$, $w^{\zeta\zeta}(p)=w(p)$ und $f\,w(p)=f'w(p)$ also (2) mit (3) gleich.

Der Durchmesser von $f^\zeta(\overline{V}^{\zeta\zeta})$ geht gegen 0, wenn ζ gegen 0 geht. Hieraus und aus $f^0(q)=q$ folgt leicht, wenn F die durch $F(p,\tau)=f^\tau(p)$, (p,τ) ein Punkt mit $p\in\overline{V}$ und $0\leqq\tau\leqq 1$, bestimmte Abbildung bezeichnet, die Stetigkeit von F in $(q,0)$. Die Stetigkeit von F in den übrigen Punkten folgt leicht aus der Stetigkeit der Abbildungen f^τ, $0\leqq\tau\leqq 1$, und (1) bis (3). Mithin ist $(f^\tau,\ 0\leqq\tau\leqq 1)$ eine Abbildungsschar im Sinne der gebräuchlichen Erklärung einer solchen.

Verbleibt zum Beweis von Satz 1 zu zeigen, daß für $0<\tau\leqq 1$ die Abbildung f^τ keinen Fixpunkt hat: Für $p\in\overline{V}-V^{\tau\tau}$ ist $f^\tau(p)$ gleich einem Punkt $p+\alpha\overrightarrow{p'f(p')}$ mit $\alpha>0$ und $p'\in\overline{V}-q$, wegen $p'\neq f(p')$ daher $p\neq f^\tau(p)$. Für $p\in V^{\tau\tau}$ ist $f^\tau(p)$ ein Punkt $p+\tau\overrightarrow{p''f'(p'')}$ mit $p''\in\overline{V}$, wegen $\tau>0$ und $p''\neq f'(p'')$ also gleichfalls $p\neq f^\tau(p)$.

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Satz 2. *Es seien V eine offene n-dimensionale Vollkugel im R^n, $n>0$; $q,q_1,\ldots,q_m$ paarweis verschiedene Punkte in V und f,f' stetige Abbildungen von $\overline{V}$ in den R^n mit $f(p)=f'(p)$, $p\in\overline{V}-V$, und den Eigenschaften: der einzige Fixpunkt von f ist q; die Punkte $q_1,\ldots,q_m$ sind die Fixpunkte der Abbildung f'. Für alle (τ,i) mit $0<\tau<1$ und $i=1,\ldots,m$ bezeichne q^τ den Punkt $(1-\tau)\,q+\tau q_i$. Dann gibt es eine Schar $(f^\tau,\ 0\leqq\tau\leqq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von $\overline{V}$ in den R^n, von der gilt: $f^0=f$ und $f^1=f'$; $f^\tau(p)=f(p)$ in allen (p,τ) mit $p\in\overline{V}-V$ und $0\leqq\tau\leqq 1$; für $0<\tau<1$ sind die Punkte $q_1^\tau,\ldots,q_m^\tau$ die Fixpunkte der Abbildung f^τ.*

Beweis. Man kann annehmen, daß q der Mittelpunkt von V ist. Die Bedeutung von w, V^σ und w^σ sei die gleiche wie im Beweis zu Satz 1. Dann ist die im Beweis zu Satz 1 durch (1) bis (3) erklärte Abbildungsschar $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ schon von der geforderten Art.

Aus Satz 2 folgt, wenn V und q die in Satz 2 erklärte Bedeutung haben: Zu jeder stetigen Abbildung f von $\overline{V}$ in den R^n, die q zum einzigen Fixpunkt hat, gibt es paarweis verschiedene Punkte $q_1, \ldots, q_m$ in V und eine Schar $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von $\overline{V}$ in den R^n mit den Eigenschaften: $f^\tau(p) = f(p)$ in allen (p, τ), für die entweder $p \in V$ und $\tau = 0$ oder $p \in \overline{V} - V$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$; für $0 < \tau \leqq 1$ sind die Punkte $(1-\tau)\, q + \tau\, q_i$, $i = 1, \ldots, m$, die Fixpunkte der Abbildung f^τ; jeder Fixpunkt der Abbildung f^1 ist linear.

Denn aus bekannten Sätzen ergibt sich die Existenz einer stetigen Abbildung f' von $\overline{V}$ in den R^n, die auf $\overline{V} - V$ mit f übereinstimmt und deren jeder Fixpunkt linear ist.

Ferner folgt aus Satz 2: Zu jeder stetigen Abbildung f von V in den R^n, die auf $\overline{V} - V$ keinen Fixpunkt und auf V nur endlich viele Fixpunkte $q_1, \ldots, q_m$ besitzt, existiert ein Punkt q in V und eine Schar $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von $\overline{V}$ in den R^n mit den Eigenschaften: $f^\tau(p) = f(p)$ in allen (p, τ), für die entweder $p \in \overline{V}$ und $\tau = 0$ oder $p \in \overline{V} - V$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$; für $0 \leqq \tau < 1$ sind die Punkte $(1-\tau)\, q_i + \tau\, q$, $i = 1, \ldots, m$, die Fixpunkte der Abbildung f^τ; der einzige Fixpunkt der Abbildung f^1 ist der Punkt q.

Bezeichnet nämlich q irgendeinen Punkt aus V und $w(p)$ für $p \in \overline{V} - q$ die Projektion von p auf $\overline{V} - V$ aus q, so ist die durch $f'(q) = q$ und

$$f'(p) = q + (1-\sigma)\, \overrightarrow{q\, f\, w(p)},$$

p ein Punkt aus $\overline{V} - q$ mit $p = q + (1-\sigma)\, \overrightarrow{q\, w(p)}$, bestimmte Abbildung f' eine stetige Abbildung von $\overline{V}$ in den R^n, die auf $\overline{V} - V$ mit f übereinstimmt und deren einziger Fixpunkt der Punkt q ist.

Für den folgenden Satz bezeichne K einen simplizialen Komplex, der in einem Euklidischen Raum liegt, und P das durch K bestimmte Polyeder. Eine stetige Abbildung von P in sich derart, daß für alle Punkte aus P stets Punkt und Bildpunkt in benachbarten Simplexen von K liegen, bezeichnen wir als eine zur Identität „benachbarte" Abbildung; dabei nennen wir wie in Abschnitt 1 zwei Punkte aus P, deren zu K gehörige Trägersimplexe einen nichtleeren Durchschnitt haben, in „benachbarten Simplexen von K liegende Punkte". Ferner seien S und T Grundsimplexe aus K mit $\dim(S \cdot T) \geqq 1$; hierauf a, b, q bzw. ein innerer Punkt von S, T und $S \cdot T$; und A die Menge aller Punkte p aus P, deren Trägersimplex das Simplex $S \cdot T$ enthält. Alsdann wollen wir zeigen:

Satz 3. *Es sei f eine zur Identität benachbarte Abbildung von P in sich mit a als einzigem Fixpunkt auf $\bar{A}$; überdies sei a linear bei f. Dann existiert eine Kurve $(q^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ und eine Schar $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ zur Identität benachbarter Abbildungen f^τ von P in sich mit den Eigenschaften: $f^\tau(p) = f(p)$ in*

allen (p, τ), *für die entweder* $p \in P$ *und* $\tau = 0$ *oder* $p \in P - A$ *und* $0 \leqq \tau \leqq 1$; *für* $0 \leqq \tau \leqq 1$ *ist der Punkt* q^τ *der einzige Fixpunkt von* f^τ *auf* $\bar{A}$ *und linear bei* f^τ; *es ist* $q^0 = a$, $q^{\frac{1}{2}} = q$, $q^1 = b$, *für* $0 < \tau < \frac{1}{2}$ *liegt* q^τ *in* $I(S)$ *und für* $\frac{1}{2} < \tau < 1$ *in* $I(T)$.

Beweis. Die Menge A ist offen in P. Man kann annehmen, wie sich leicht aus dem zu Ende von Abschnitt 1 angeführten Hilfssatz ergibt, daß eine in P offene Menge V existiert mit $\overline{aq} + \overline{qb} \subset V \subset A$ und

$$f(\bar{V}) \subset A. \tag{1}$$

Es seien weiter S_0 und T_0 Simplexe der Dimension 2, von denen gilt: $S_0 \subset S$, $T_0 \subset T$, $\dim(S_0 \cdot T_0) = 1$, $S_0 + T_0 \subset A$; a liegt im Innern von S_0, b im Innern von T_0 und q im Innern von $S_0 \cdot T_0$.

Da a bei f linear ist, gibt es eine offene Vollkugel W mit $\dim W = \dim S$, $a \in W$ und

$$\overline{W} \subset S - S \cdot T, \qquad f(\overline{W}) \subset S_0 - S_0 \cdot T_0.$$

Den Schnittpunkt der Sphäre $\overline{W} - W$ mit der Strecke $\overline{aq}$ nennen wir d.

Wegen $p \neq f(p)$, $p \in \overline{dq} + \overline{qb}$, kann man annehmen, daß $f(\overline{dq} + \overline{qb})$ ein Streckenzug ist, der mit $\overline{dq} + \overline{qb}$ höchstens endlich viele gemeinsame Punkte hat.

Hierauf wollen wir zeigen:

II. Es gibt eine Schar $(g_0^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen g_0^τ von $\overline{dq} + \overline{qb}$ in P mit den Eigenschaften: $g_0^\tau(d) = f(d)$ für $0 \leqq \tau \leqq 1$;

$$g_0^0(p) = f(p) \quad \text{und} \quad g_0^1(p) \in S_0 + T_0$$

für $p \in \overline{dq} + \overline{qb}$; in allen (p, τ) mit $p \in \overline{dq} + \overline{qb}$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ ist $p \neq g_0^\tau(p)$ und $g_0^\tau(p)$ in A gelegen.

Beweis von II. Es sei α die Zahl $\frac{1}{2}$. Wegen $\dim(S \cdot T) \geqq 1$ existiert, wie man sich leicht überlegt, eine Schar $(g_0^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq \alpha)$ stetiger Abbildungen g_0^τ von $\overline{dq} + \overline{qb}$ in P mit den Eigenschaften: $g_0^\tau(d) = f(d)$ für $0 \leqq \tau \leqq \alpha$; $g_0^0(p) = f(p)$ für $p \in \overline{dq} + \overline{qb}$;

$$g_0^\alpha(p) \in S_0 - S_0 \cdot T_0$$

für alle Punkte p aus $\overline{q_1 q} + \overline{q q_2}$, wobei q_1 ein Punkt im Innern von $\overline{dq}$ und q_2 ein Punkt im Innern von $\overline{qb}$; in allen (p, τ) mit $p \in \overline{dq} + \overline{qb}$ und $0 \leqq \tau \leqq \alpha$ ist $p \neq g_0^\tau(p)$ und $g_0^\tau(p)$ in A gelegen.

Hierauf ergibt eine einfachere Deformation der Kurve $(g_0^\alpha(p),\ p \in \overline{dq} + \overline{qb})$ eine Fortsetzung von $(g_0^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq \alpha)$ über $(\alpha, 1]$, so daß II gilt.

Aus II folgt leicht:

II'. Es existiert eine in P offene Menge X mit $\overline{aq} + \overline{qb} \subset X \subset A$ und eine Schar $(g^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von P in sich mit den Eigenschaften: $g^\tau(p) = f(p)$ in allen (p, τ), für die entweder $p \in P$ und $\tau = 0$ oder $p \in P - A$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$; für $0 \leqq \tau \leqq 1$ ist a der einzige Fixpunkt von g^τ auf

A und bei g^τ linear; für $0 \leqq \tau \leqq 1$ ist g^τ zur Identität benachbart;

$$g^1(\overline{X}) < S_0 + T_0. \tag{2}$$

Wie man sich leicht überlegt, gibt es eine in P offene Menge Y, von der $\overline{a\,q} + \overline{q\,b} < Y < X$ und, wenn $Y \cdot (S_0 + T_0)$ mit Y_0 bezeichnet wird, weiter gilt: man kann $\overline{Y}$ so durch eine stetige Abbildung w auf $\overline{Y}_0$ abbilden, daß

$$w(p) = p \quad \text{für} \quad p \in \overline{Y}_0 \quad \text{und} \quad \overline{p\,w(p)} < X \quad \text{für} \quad p \in \overline{Y}.$$

Für alle (p, τ) mit $p \in \overline{Y}$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ werde der in X liegende Punkt $(1-\tau)\,p + \tau\,w(p)$ mit $w^\tau(p)$ bezeichnet.

Dann sei erstens $(h_0^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen h_0^τ von $\overline{Y}_0$ in $S_0 + T_0$, von der gilt: $h_0^\tau(p) = g^1(p)$ in allen (p, τ), für die entweder $p \in \overline{Y}_0$ und $\tau = 0$ oder $p \in \overline{Y}_0 - Y_0$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$; für $0 \leqq \tau \leqq \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2} < \tau \leqq 1$ ist der Punkt

$$(1 - 2\tau)\,a + 2\tau\,q \quad \text{bzw.} \quad (2 - 2\tau)\,q + (2\tau - 1)\,b,$$

den wir auch mit q_0^τ bezeichnen, der einzige Fixpunkt von h_0^τ und linear bei h_0^τ. Wegen $\dim(S_0 \cdot T_0) = 1$ existiert eine solche Schar.

Zweitens erklären wir eine Schar $(h_1^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen h_1^τ von $\overline{Y}$ in $S_0 + T_0$. Es sei:

$$h_1^\tau = g^1 w^{2\tau} \quad \text{für} \quad 0 \leqq \tau \leqq \tfrac{1}{2}, \qquad h_1^\tau = h_0^{2\tau-1} w^1 \quad \text{für} \quad \tfrac{1}{2} < \tau \leqq 1.$$

Wegen $h_0^0(p) = g^1(p)$, $p \in \overline{Y}_0$, ist $g^1 w^1 = h_0^0 w^1$. Es ist

$$h_1^\tau(p) = g^1(p) \quad \text{für} \quad p \in \overline{Y}_0 - Y_0 \quad \text{und} \quad 0 \leqq \tau \leqq 1. \tag{3}$$

Denn in allen (p, τ) mit $p \in \overline{Y}_0 - Y_0$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ ist $w^\tau(p) = p$ und $h_0^\tau(p) = g^1(p)$.

Wir wollen zeigen:

1. Für $0 \leqq \tau \leqq \frac{1}{2}$ ist der Punkt a der einzige Fixpunkt der Abbildung h_1^τ und bei h_1^τ linear.

2. Für $\frac{1}{2} < \tau \leqq 1$ ist der Punkt $q_0^{2\tau-1}$ der einzige Fixpunkt der Abbildung h_1^τ und bei h_1^τ linear.

Zu 1. Für $p \in \overline{Y} - \overline{Y}_0 < \overline{Y}$ ist $w^{2\tau}(p) \in X$, wegen (2) also $g^1 w^{2\tau}(p)$ in $S_0 + T_0$ gelegen und mithin, da $S_0 + T_0$ und $\overline{Y} - \overline{Y}_0$ zueinander fremd, $p \neq h_1^\tau(p)$. Für $p \in \overline{Y}_0$ ist $w^{2\tau}(p) = p$, also $h_1^\tau(p) = g^1(p)$ und daher $p = h_1^\tau(p)$ nur, wenn $p = a$. — Es ist a bei h_1^τ linear: Da a bei g^1 linear, gibt es eine in P offene Menge $Z \ni a$ und eine Strecke Z^1 mit $g^1(Z) < Z^1$. Hierauf sei Z' eine in P offene Menge $\ni a$ derart, daß $w^\sigma(p) \in Z$ für alle (p, σ) mit $p \in Z'$ und $0 \leqq \sigma \leqq 1$. Dann ist $h_1^\tau(Z') < Z^1$, also a bei h_1^τ linear.

Zu 2. Für $p \in \overline{Y} - \overline{Y}_0 < \overline{Y}$ ist $w^1(p) \in \overline{Y}_0$, der Erklärung der Abbildungen h_0^σ zufolge also $h_0^{2\tau-1} w^1(p) \in S_0 + T_0$, daher $p \neq h_1^\tau(p)$. Für $p \in \overline{Y}_0$ ist $w^1(p) = p$, also $h_1^\tau(p) = h_0^{2\tau-1}(p)$ und daher $p = h_1^\tau(p)$ nur, wenn p der Punkt $q^{2\tau-1}$ ist. —

Es ist $q^{2\tau-1}$ bei $h_1^{2\tau-1}$ linear: Da $q^{2\tau-1}$ bei $h_0^{2\tau-1}$ linear, gibt es eine in S_0+T_0 offene Menge $Z_0 \ni q^{2\tau-1}$ und eine Strecke Z_0^1 mit $h_0^{2\tau-1}(Z_0) \subset Z_0^1$. Hierauf sei Z_0' eine in P offene Menge $\ni q^{2\tau-1}$ derart, daß $w^1(p) \in Z_0$ für $p \in Z_0'$. Dann ist $h_1^\tau(Z_0') \subset Z_0^1$, also $q^{2\tau-1}$ bei h_1^τ linear.

Um drittens eine Schar $(h^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen h^τ von P in sich zu erklären, sei zunächst Y_1 eine in P offene Menge mit $Y_0 \subset Y_1 \subset Y$ und

$$\overline{Y}_1 \cdot (\overline{Y} - Y) = \overline{Y}_0 - Y_0; \tag{4}$$

ferner jedem Punkt p aus $\overline{Y}$ eine Zahl $\mu(p)$ aus $[0, 1]$ zugeordnet. Und zwar sei

$$\mu(p) = \varrho(p, \overline{Y} - \overline{Y})/(\varrho(p, \overline{Y} - Y) + \varrho(p, \overline{Y}_1)),$$

wenn $\varrho(p, \overline{Y} - Y) + \varrho(p, \overline{Y}_1) > 0$, sonst $= 0$. In allen (p, τ) mit $p \in \overline{Y}$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ sei hierauf

$$h^\tau(p) = h_1^{\mu(p)\tau}(p). \tag{5}$$

In den (p, τ) mit $p \in P - Y$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ setzen wir

$$h^\tau(p) = g^1(p). \tag{6}$$

Die Erklärungen (5) und (6) stimmen in den (p, τ) mit $p \in \overline{Y} - Y$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ überein; in diesen (p, τ) ist nämlich $\mu(p) = 0$ und daher $h_1^{\mu(p)\tau}(p) = h_1^0(p) = g^1 w^0(p) = g^1(p)$.

Mit H bezeichnen wir die durch $H(p, \tau) = h^\tau(p)$, $p \in P$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$, bestimmte Abbildung. Zum Nachweis der Stetigkeit der Abbildung H genügt es dann, die Stetigkeit in den (p, τ) mit $p \in \overline{Y}$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ zu prüfen; und also weiter in denjenigen Punkten (p, τ) mit $p \in \overline{Y}$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$, für die die Abbildung μ in dem Punkt p unstetig ist. Wegen (4) ist die Menge der Unstetigkeitspunkte von μ die Menge $\overline{Y}_0 - Y_0$. Daher folgt die Stetigkeit von H aus (3).

Wegen $g^1(p) = f(p)$, $p \in P - A$, und $Y \subset A$ sowie (6) ist $h^\tau(p) = f(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in P - A$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$.

Da für $0 \leqq \tau \leqq 1$ die Abbildung h^τ auf der in P offenen Menge Y_1 mit h_1^τ übereinstimmt und auf $\overline{Y} - Y_1$ kein Fixpunkt von h^τ liegt, folgt aus 1. und 2.: Für $0 \leqq \tau \leqq \frac{1}{2}$ ist der Punkt a der einzige Fixpunkt der Abbildung h^τ auf $\overline{Y}$ und bei h^τ linear; für $\frac{1}{2} < \tau \leqq 1$ ist der Punkt $q_0^{2\tau-1}$ der einzige Fixpunkt von h^τ auf $\overline{Y}$ und bei h^τ linear.

Dann ist $(f^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1) = (g^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1;\ h^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ eine Abbildungsschar der in Satz 3 geforderten Art.

3. Abbildungsscharen mit linearen Fixpunkten.

Eine stetige Abbildung f eines endlichen Polyeders P in sich bezeichnen wir als „regulär", wenn jeder Fixpunkt von f regulär. Sind K eine simpliziale Zerlegung von P und f_1, f_2 stetige Abbildungen von P in sich derart,

daß für alle Punkte p aus P stets die beiden Punkte $f_1(p)$ und $f_2(p)$ in benachbarten Simplexen von K liegen, so bezeichnen wir f_1 und f_2 als „benachbarte" Abbildungen. Der vorliegende Abschnitt handelt im wesentlichen über die zur Identität benachbarten regulären simplizialen Abbildungen von P in sich. Auf die Einschränkung, die betrachteten Abbildungen seien regulär und simplizial, werden wir erst im nächsten Abschnitt auf Grund weiterer Überlegungen verzichten können. Näherhin untersuchen wir in dem vorliegenden Abschnitt diejenigen stetigen Abbildungen f, von denen gilt: 1. Es ist f zur Identität benachbart; 2. jeder Fixpunkt von f ist linear. Solche Abbildungen kann man aber in sehr übersichtlicher Weise in reguläre simpliziale Abbildungen überführen, und umgekehrt läßt sich jede reguläre simpliziale Abbildung auf übersichtliche Art in eine Abbildung mit nur linearen Fixpunkten überführen: Jede Abbildung f der einen Art kann man so durch eine Abbildungsschar $(f^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ in eine Abbildung der anderen Art deformieren, daß für $0 \leq \tau \leq 1$ die Fixpunkte der Abbildung f^τ gerade die Fixpunkte von f sind. Dies folgt leicht aus bekannten Sätzen.

Wir wollen zeigen:

Satz II. *Es sei K ein eindimensional zusammenhängender endlicher simplizialer Komplex in einem Euklidischen Zahlenraum und P das durch K bestimmte Polyeder; ferner f eine zur Identität benachbarte Abbildung von P in sich mit nur endlich vielen Fixpunkten, deren jeder überdies linear ist. Dann existieren Kurven $(q_i^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$, $i = 1, \ldots, m$, und eine Schar $(f^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ zur Identität benachbarter Abbildungen f^τ von P in sich mit $f^0 = f$ und den Eigenschaften: für $0 \leq \tau \leq 1$ sind die paarweis verschiedenen Punkte $q_1^\tau, \ldots, q_m^\tau$ die Fixpunkte der Abbildung f^τ; die Abbildung f^1 hat genau einen Fixpunkt q, und es ist $q_i^1 = q$ für $i = 1, \ldots, m$.*

Beweis. Man kann annehmen, daß jeder der Fixpunkte $q_1, \ldots, q_m$ der Abbildung f im Innern eines Grundsimplexes von K liegt. Dann seien α, β Zahlen mit $0 < \alpha < \beta < 1$ und S ein Grundsimplex von K. Wie man sich leicht überlegt, existieren eine simpliziale Unterteilung K' von K und in K' Grundsimplexe S_{ik}, $k = 1, \ldots, m_i$, $i = 1, \ldots, m$, mit den Eigenschaften:

$$q_i \in I(S_{i1}) \quad \text{und} \quad S_{im_i} < S \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, m;$$

für $i = 1, \ldots, m$ haben je zwei aufeinanderfolgende Simplexe der Kette $S_{i1}, \ldots, S_{im_i}$ einen Durchschnitt, dessen Dimension ≥ 1 ist; für $j \neq l$ hat kein Simplex aus K' gleichzeitig mit $\sum_k S_{jk}$ und $\sum_k S_{lk}$ gemeinsame Punkte.

Für $p \in P$ liegen die Punkte p und $f(p)$ in benachbarten Simplexen von K. Dem in Abschnitt 1 angeführten Hilfssatz zufolge gibt es daher eine für alle (p, τ), $p \in P$ und $0 \leq \tau \leq 1$, erklärte stetige Abbildung a in P mit den Eigenschaften:

(1) $$a(p, 0) = f(p) \quad \text{und} \quad a(p, 1) = p;$$

(2) $$a(p, \tau) = p \quad \text{für} \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad \text{wenn} \quad p = f(p);$$

(3) $$a(p, \tau_1) \neq a(p, \tau_2)$$

in allen (p, τ_1, τ_2) mit $p \neq f(p)$ und $\tau_1 \neq \tau_2$; ist T_0 das Trägersimplex von $a(p, 0)$ und T_1 das von $a(p, 1)$ in K, so gibt es im Innern des Simplexes $T_0 \cdot T_1$ einen Punkt q derart, daß $a(p, \tau)$ in $\overline{f(p)\, q} + \overline{q\, p}$ liegt für $0 \leqq \tau \leqq 1$.

Hierauf bezeichne ζ eine Zahl mit $0 < \zeta < 1$, so daß für $p \in P$ die Punkte p und $a(p, \zeta)$ in benachbarten Simplexen von K' liegen. Wegen (1), (2) und der Kompaktheit von P existiert eine solche Zahl. Es bezeichne ferner U_i und V_i, $i = 1, \ldots, m$, in P offene Mengen mit $q_i \in U_i$, $\overline{U}_i \subset V_i$ und $\overline{V}_i + f(\overline{V}_i) < I(S_{i1})$; weiter $\lambda(p)$ für $p \in P$ die Zahl

$$\varrho(p, \sum \overline{U}_i) / (\varrho(p, \sum \overline{U}_i) + \varrho(p, P - \sum V_i)).$$

Für $0 \leqq \tau \leqq \alpha$ sei dann f^τ die durch

$$f^\tau(p) = a\Big(p, \frac{\zeta}{\alpha} \lambda(p)\, \tau\Big), \qquad p \in P, \tag{4}$$

bestimmte Abbildung von P in sich.

Wegen (1) ist $f_0 = f$. Wegen (3) sind für $0 \leqq \tau \leqq \alpha$ die Punkte $q_1, \ldots, q_m$ die Fixpunkte der Abbildung f^τ. Aus der Erklärung von a folgt weiter: Für alle (p, τ) mit $p \in P$ und $0 \leqq \tau \leqq \alpha$ sind die Punkte p und $f^\tau(p)$ in benachbarten Simplexen von K gelegen. Schließlich folgt aus $f^\alpha(p) = a(p, \zeta)$, $p \in P - \sum V_i$, und der Erklärung von ζ und V_i, daß für $p \in P$ die Punkte p und $f^\alpha(p)$ in benachbarten Simplexen von K' liegen. Wegen $f^\alpha(p) = f^0(p)$, $p \in \sum U_i$, sind die Punkte q_i bei f^α linear.

Alsdann liefert eine wiederholte Anwendung von Satz 3 Kurven $(q_i^\tau, \alpha \leqq \tau \leqq \beta)$, $i = 1, \ldots, m$, und eine Fortsetzung von $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq \alpha)$ über $(\alpha, \beta]$, von der gilt: Für alle (p, τ) mit $p \in P$ und $\alpha < \tau < \beta$ sind die Punkte p und $f^\tau(p)$ in benachbarten Simplexen von K' — und also erst recht in benachbarten Simplexen von K — gelegen; $q_i^\alpha = q_i$ und $q_i^\beta \in I(S)$ für $i = 1, \ldots, m$; für $\alpha < \tau \leqq \beta$ sind die Punkte $q_1^\tau, \ldots, q_m^\tau$ paarweis verschieden und die Fixpunkte der Abbildung f^τ.

In den Punkten (p, τ) mit $p \in P - S$ und $\beta < \tau \leqq 1$ sei $f^\tau(p) = f^\beta(p)$. Bezeichnen wir mit g die durch $g(p) = f^\beta(p)$, $p \in S$, bestimmte Abbildung von S in P, so bedarf es zum Beweis von Satz II nur noch des Nachweises, daß eine Schar $(g^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von S in P existiert, über die gilt: $g^\tau(p) = g(p)$ in allen (p, τ), für die entweder $p \in S$ und $\tau = 0$ oder $p \in B(S; P)$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ ist; für alle (p, τ) mit $p \in S$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ liegen die Punkte p und $g^\tau(p)$ in benachbarten Simplexen aus K; es gibt Kurven $(r_i^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$, $i = 1, \ldots, m$, mit $r_i^1 = q$, $i = 1, \ldots, m$, derart, daß für $0 \leqq \tau < 1$ die Punkte $r_1^\tau, \ldots, r_m^\tau$ paarweis verschieden und die Fixpunkte der Abbildung g^τ sind; der einzige Fixpunkt der Abbildung g^1 ist der Punkt q.

Die Existenz der Abbildungen g^τ, $0 \leqq \tau \leqq 1$, ergibt sich wie folgt. Da für $p \in S$ die Punkte p und $g(p)$ in benachbarten Simplexen von K liegen, existiert eine für alle (p, τ), $p \in S$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$, erklärte stetige Abbildung b in P, von der (1) bis (3), wenn man darin bzw. a, f durch b, g ersetzt, gilt und weiter: für alle (p, τ) mit $p \in S$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ liegen die Punkte p und $b(p, \tau)$ in benachbarten Simplexen von K.

Nun bezeichne T ein Simplex im Innern von S mit $\dim T = \dim S$ derart, daß die Punkte $q_1^\beta, \ldots, q_m^\beta$ im Innern von T liegen; und η eine Zahl mit $0 < \eta < 1$, so daß

$$b(p, \eta) \in I(S), \qquad p \in T. \tag{5}$$

Hierauf sei λ eine stetige Abbildung von S in $[0, 1]$ mit $\lambda(p) = 0$, $p \in B(S; P)$, und $\lambda(p) = 1$ für $p \in T$; ferner $g^\tau(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in S$ und $0 \leq \tau \leq \eta$ der Punkt $b(p, \eta\, \lambda(p)\, \tau)$.

Dann ist, wie sofort aus der Bedeutung der Abbildungen b, λ und der Zahl η hervorgeht, $(g^\tau,\ 0 \leq \tau \leq \eta)$ eine Schar stetiger Abbildungen g^τ von S in P, von der

$$g^\eta(T) \subset S \tag{6}$$

gilt und ferner: $g^\tau(p) = g(p)$ in allen (p, τ), für die entweder $p \in S$ und $\tau = 0$ oder $p \in B(S; P)$ und $0 \leq \tau \leq \eta$; für alle (p, τ) mit $p \in S$ und $0 \leq \tau \leq \eta$ liegen die Punkte p und $g^\tau(p)$ in benachbarten Simplexen von K; für $0 \leq \tau \leq \eta$ sind die Punkte $q_1^\beta, \ldots, q_m^\beta$ die Fixpunkte von g^τ.

Dann liefert eine Anwendung von Satz 2 eine stetige Fortsetzung von $(g^\tau,\ 0 \leq \tau \leq \eta)$ über $(\eta, 1]$ von der geforderten Art.

Damit ist Satz II bewiesen. Aus diesem folgt leicht nachstehender schon in der Einleitung angeführte

Satz II′. *Es sei K ein eindimensional zusammenhängender endlicher simplizialer Komplex in einem Euklidischen Zahlenraum und P das durch K bestimmte Polyeder; ferner f die Identität von P und ε eine positive Zahl. Dann gibt es Kurven $(q_i^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$, $i = 1, \ldots, m$, und eine Schar $(f^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen von P in sich mit $f^0 = f$, $\varrho(f, f^\tau) < \varepsilon$, $0 \leq \tau \leq 1$, und den weiteren Eigenschaften: für $0 < \tau < 1$ sind die paarweis verschiedenen Punkte $q_1^\tau, \ldots, q_m^\tau$ die Fixpunkte der Abbildung f^τ; die Abbildung f^1 hat genau einen Fixpunkt q, und es ist $q_i^1 = q$ für $i = 1, \ldots, m$.*

Beweis. Man kann annehmen, daß die Durchmesser der Simplexe von K kleiner als $\varepsilon/2$ sind. Dann sei f' eine zur Identität benachbarte Abbildung von P in sich mit nur endlich vielen Fixpunkten $q_1, \ldots, q_m$, deren jeder überdies linear ist. Eine Anwendung des Hilfssatzes aus Abschnitt 1 liefert eine Schar $(f^\tau,\ 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2})$ zur Identität benachbarter Abbildungen f^τ von P in sich mit $f^0 = f$, $f^{\frac{1}{2}} = f'$ und der Eigenschaft, daß für $0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}$ die Punkte $q_1, \ldots, q_m$ die einzigen Fixpunkte von f^τ sind.

Hierauf führt eine Anwendung von Satz II den Beweis zu Ende.

4. Normale Abbildungsscharen.

Eine zur Identität benachbarte Abbildung f, deren Fixpunkte linear sind, kann man, wie oben gezeigt wurde, derart durch eine Schar zur Identität benachbarter Abbildungen in eine Abbildung mit genau einem Fixpunkt überführen, daß die Fixpunkte der Abbildung f längs Kurven zum Vereinigungspunkt geführt werden. An diesem Ergebnis stört die Voraussetzung,

die Fixpunkte der Abbildung f seien linear. Wir werden aber im vorliegenden Abschnitt zeigen, daß man die in Rede stehende Voraussetzung entfernen kann. Wie in den voraufgegangenen Abschnitten nennen wir, wenn K einen simplizialen Komplex und P das durch K bestimmte Polyeder bezeichnet, eine stetige Abbildung von P in sich, bei der für alle Punkte aus P stets Punkt und Bildpunkt in benachbarten Simplexen von K liegen, eine „zur Identität benachbarte Abbildung".

Dann gilt, eine Verschärfung von Satz II, folgender

Satz III. *Es sei K ein eindimensional zusammenhängender endlicher simplizialer Komplex, der in einem Euklidischen Zahlenraum liegt, und P das zu K gehörige Polyeder; f eine zur Identität benachbarte Abbildung von P in sich mit nur endlich vielen Fixpunkten. Dann existiert eine Schar $(f^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ zur Identität benachbarter Abbildungen f^τ von P in sich mit den Eigenschaften: $f^0 = f$; die Abbildung f^1 hat genau einen Fixpunkt q; es gibt Kurven $(q_i^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$, $i = 1, \ldots, m$, derart, daß für $0 \leqq \tau < 1$ die paarweis verschiedenen Punkte $q_1^\tau, \ldots, q_m^\tau$ die Fixpunkte von f^τ.*

Wie eine Durchsicht des Beweises von Satz II ergibt, braucht es zum Beweis von Satz II nur den Nachweis der nachstehenden Sätze 4 und 5.

Wir beweisen zunächst einen

Hilfssatz. *Es seien N ein Nebensimplex von K, q ein Punkt im Innern von N und $S_1, \ldots, S_m$ die Grundsimplexe von K mit N als Seite; A das Innere bezüglich P von $\sum S_i$; A^0 die Menge der Punkte $q + \frac{1}{2}\overrightarrow{q\,p}$, $p \in A$, und a ein Punkt aus A^0; ferner f eine stetige Abbildung von $\bar{A}^0$ in A mit a als einzigem Fixpunkt. Dann gibt es eine Schar $(f^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von $\bar{A}^0$ in A mit den Eigenschaften: $f^\tau(p) = f(p)$ in allen (p, τ), für die entweder $p \in \bar{A}^0$ und $\tau = 0$ oder $p \in \bar{A}^0 - A^0$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$; für $0 \leqq \tau \leqq 1$ ist der Punkt $q + (1-\tau)\,\overrightarrow{q\,a}$ der einzige Fixpunkt der Abbildung f^τ; es ist $f^1(q) = q$ und*

$$f^1(p) = q + (1-\sigma)\,\overrightarrow{q\,f\,w\,(p)},$$

wenn p ein Punkt aus $\bar{A}^0 - q$ mit $p = q + (1-\sigma)\,\overrightarrow{q\,w\,(p)}$ und $w(p)$ der Schnittpunkt des Halbstrahles aus q durch p mit $\bar{A}^0 - A^0$ ist.

Beweis. Für $0 \leqq \tau < 1$ werde die Menge der Punkte $q + (1-\tau)\,\overrightarrow{q\,p}$, $p \in A^0$, mit A^τ bezeichnet. In allen (p, τ) mit $p \in \bar{A}^0$ und $0 \leqq \tau < 1$ sei $u^\tau(p)$ der Punkt $q + (1-\tau)\overrightarrow{q\,p}$. Für $0 \leqq \tau < 1$ sei w^τ die Umkehrung der Abbildung u^τ, also

$$w^\tau(p) = q + \overrightarrow{q\,p}\,(1-\tau), \qquad p \in \bar{A}^\tau.$$

Für $p \in \bar{A}^0 - q$ bezeichne $w(p)$ den Schnittpunkt des Halbstrahles aus q durch p mit $\bar{A}^0 - A^0$.

Es sei nun ζ eine Zahl aus $[0, 1)$. Dann erklären wir die Abbildung f^ζ auf $\bar{A}^0$ wie folgt. Für $p \in \bar{A}^\sigma - A^\sigma$, $0 \leqq \sigma \leqq \zeta$, sei

$$f^\zeta(p) = q + (1-\sigma)\,\overrightarrow{q\,f\,w\,(p)}; \tag{1}$$

für $p \in \bar{A}^\zeta$ sei

$$f^\zeta(p) = q + (1-\zeta)\,\overrightarrow{q\,f\,w^\zeta(p)}. \tag{2}$$

Es sei $f^1(q) = q$ und für $p \in \bar{A}^\sigma - A^\sigma$, $0 \leqq \sigma < 1$, weiter

$$f^1(p) = q + (1-\sigma)\,\overrightarrow{q\,f\,w(p)}. \tag{3}$$

Da für jeden Punkt p aus $\bar{A}^0$ alle Punkte der Strecke $\overline{q\,f(p)}$ in A liegen, ist $f^\tau(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in \bar{A}^0$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ durch (1) bis (3) erklärt. Zum Beweis, daß $f^\tau(p)$ in allen (p, τ) eindeutig ist, genügt es zu zeigen, daß (1) und (2) auf der Menge $\bar{A}^\zeta - A^\zeta$ übereinstimmen. Für einen Punkt p dieser Menge ist aber $w^\zeta(p) = w(p)$ und also (1) mit (2) gleichbedeutend. Aus der Übereinstimmung von (1) und (2) auf $\bar{A}^\zeta - A^\zeta$ folgt weiter, daß für $0 \leqq \tau < 1$ die Abbildung f^τ stetig ist; f^1 ist stetig nach (3). Schließlich ist, da (1) und (2) für $\zeta \to 1$ in (3) übergehen, $(f^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ sogar eine Abbildungsschar im Sinne der üblichen Erklärung einer solchen.

Von den an $(f^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ im Hilfssatz gestellten Forderungen ist offenbar nur nachzuweisen, daß für $0 \leqq \tau \leqq 1$ der Punkt $q + (1-\tau)\,\overrightarrow{q\,a}$ der einzige Fixpunkt von f^τ ist. Dies ergibt sich wie folgt.

Es sei wieder ζ eine Zahl aus $[0, 1)$. Ist dann erstens p ein Punkt aus $\bar{A}^\sigma - A^\sigma$ und $0 \leqq \sigma \leqq \zeta$, so ist $p = q + (1-\sigma)\,q\,w(p)$. Aus $f^\zeta(p) = p$ und (1) folgte also

$$(1-\sigma)\,w(p) = (1-\sigma)\,f\,w(p)$$

oder $w(p) = f\,w(p)$, obschon doch $w(p) \in \bar{A}^0 - A^0$ und f auf der letzteren Menge keinen Fixpunkt hat. Zweitens liege p in A^ζ, und es sei $p = f^\zeta(p)$. Wegen

$$p = q + (1-\zeta)\,\overrightarrow{q\,w^\zeta(p)}$$

und (2) ist dann $w^\zeta(p) = f\,w^\zeta(p)$, also $w^\zeta(p) = a$. Mithin $p = u^\zeta(a) = q + (1-\zeta)\,\overrightarrow{q\,a}$, wie behauptet.

Wie für Satz 3 seien für den folgenden Satz K ein simplizialer Komplex, der in einem Euklidischen Zahlenraum gelegen ist, und P das durch K bestimmte Polyeder; S und T Grundsimplexe von K mit $\dim(S \cdot T) \geqq 1$; weiter a, b und q bzw. ein innerer Punkt von S, T und $S \cdot T$; ferner A die Menge aller Punkte p aus P, deren Trägersimplex $S \cdot T$ enthält. Dann gilt:

Satz 4. *Ist f eine zur Identität benachbarte Abbildung von P in sich mit a als einzigem Fixpunkt auf $\bar{A}$, so gibt es eine Kurve $(q^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ und eine Schar $(f^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ zur Identität benachbarter Abbildungen f^τ von P in sich mit den Eigenschaften: $f^\tau(p) = f(p)$ in allen (p, τ), für die entweder $p \in P$ und $\tau = 0$ oder $p \in P - A$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$; für $0 \leqq \tau \leqq 1$ ist der Punkt q^τ der einzige Fixpunkt der Abbildung f^τ auf A; es ist $q^0 = a$, $q^{\frac{1}{2}} = q$, $q^1 = b$, für $0 < \tau < \frac{1}{2}$ liegt q^τ in $I(S)$ und für $\frac{1}{2} < \tau < 1$ in $I(T)$.*

Beweis. Es sei α eine Zahl mit $0<\alpha<1$, so daß a und b in der Menge A^0 der Punkte $q+\alpha\overrightarrow{p\,q}$, $p\in A$, liegen; β die Zahl $\frac{1}{4}$ und γ die Zahl $\frac{1}{2}$.

Vermittels des in Abschnitt 1 hergeleiteten Hilfssatzes ergibt sich dann leicht eine Schar $(f^\tau,\ 0\leqq\tau\leqq\beta)$ zur Identität benachbarter Abbildungen f^τ von P in sich mit

$$f^\beta(\bar{A}^0)\subset A \tag{1}$$

und den Eigenschaften: $f^\tau(p)=f(p)$ in allen (p,τ), für die entweder $p\in P$ und $\tau=0$ oder $p\in P-A$ und $0\leqq\tau\leqq\beta$; für $0\leqq\tau\leqq\beta$ ist der Punkt a, den wir auch q^τ nennen, der einzige Fixpunkt von f^τ auf A.

Die Schar $(f^\tau,\ 0\leqq\tau\leqq\beta)$ kann man nach dem zuletzt bewiesenen Hilfssatz derart über $(\beta,\gamma]$ fortsetzen, daß

$$f^\gamma(p)=q+(1-\sigma)\overrightarrow{q\,f^\beta w(p)}, \tag{2}$$

wenn p ein Punkt aus $\bar{A}^0-q$ mit $p=q+(1-\sigma)\overrightarrow{q\,w(p)}$ und $w(p)$ wie im obigen Hilfssatz der Schnittpunkt des Halbstrahles aus q durch p mit $\bar{A}^0-A^0$ ist; und daß weiter gilt: Auch für $\beta<\tau\leqq\gamma$ ist die Abbildung f^τ zur Identität benachbart; $f^\tau(p)=f^\beta(p)$ in allen (p,τ) mit $p\in P-A^0$ und $\beta<\tau\leqq\gamma$; für $\beta<\tau\leqq\gamma$ ist der Punkt $(2-4\tau)\,a+(4\tau-1)\,q$, den wir auch mit q^τ bezeichnen, der einzige Fixpunkt von f^τ auf A.

Wir wollen nun zeigen, daß eine stetige Abbildung f^1 von P in sich existiert, von der gilt: $f^1(p)=f^\beta(p)$ für $p\in P-A^0$; $f^1(\bar{A}^0)\subset A$; f^1 hat auf A genau einen Fixpunkt, und dies ist der in A^0 liegende Punkt b.

Die Existenz von f^1 ergibt sich wie folgt. Der im Innern von S gelegene Punkt a ist der einzige Fixpunkt der Abbildung f^β auf $\bar{A}^0$, und es gilt (1). Den regulären Fixpunkt a kann man leicht in lineare Fixpunkte zerlegen; es gibt also zunächst eine stetige Abbildung f' von P in sich, die auf $P-A^0$ mit f^β übereinstimmt und die Eigenschaften hat: $f'(\bar{A}^0)\subset A$; jeder Fixpunkt von f' auf A^0 ist linear und liegt im Innern von S. Mit Hilfe von Satz 3 zeigt man leicht weiter, daß sich die in $I(S)$ gelegenen linearen Fixpunkte von f' ins Innere von T verschieben lassen: Es gibt eine stetige Abbildung f'' von P in sich mit $f''(p)=f'(p)=f^\beta(p)$, $p\in P-A^0$, sowie $f''(\bar{A}^0)\subset A$ und der Eigenschaft, daß jeder in A^0 liegende Fixpunkt der Abbildung f'' sogar in $I(T)$ liegt. Schließlich kann man die Fixpunkte von f'' auf T in einen Fixpunkt zusammenziehen.

Den Punkt b nennen wir auch q^1.

Wegen (2) und $f^\gamma(p)=f^\beta(p)=f^1(p)$, $p\in P-A^0$, ergibt dann eine Anwendung des letzten Hilfssatzes auf f^1 eine Fortsetzung von $(q^\tau,\ 0\leqq\tau\leqq\gamma;\ q^1)$ und $(f^\tau,\ 0\leqq\tau\leqq\gamma;\ f^1)$ über $(\gamma,1)$, so daß $(f^\tau,\ 0\leqq\tau\leqq1)$ eine Abbildungsschar der verlangten Art ist.

Satz 5. *Es sei K ein simplizialer Komplex, der eindimensional zusammenhängt und in einem Euklidischen Raume liegt, P das durch K bestimmte Polyeder, V eine in P offene Menge, q ein Punkt aus V und f eine zur Identität benachbarte Abbildung von P in sich mit q als einzigem Fixpunkt auf $\bar{V}$. Dann existiert*

eine Kurve $(q^\tau,\ 0\leqq\tau\leqq 1)$ *und eine Schar* $(f^\tau,\ 0\leqq\tau\leqq 1)$ *zur Identität benachbarter Abbildungen* f^τ *von* P *in sich mit den Eigenschaften:* $f^\tau(p)=f(p)$ *in allen* (p,τ), *für die entweder* $p\in P$ *und* $\tau=0$ *oder* $p\in P-V$ *und* $0\leqq\tau\leqq 1$; *für* $0\leqq\tau\leqq 1$ *ist der in* V *liegende Punkt* q^τ *der einzige Fixpunkt von* f^τ *auf* V; q^1 *liegt im Innern eines Grundsimplexes von* K.

Beweis. Das Trägersimplex von q in K heiße N; und es bezeichne A die Menge aller Punkte aus P, deren Trägersimplex in K das Simplex N enthält. Die Menge A ist offen in P.

Wegen $q=f(q)$ gibt es eine Zahl α mit $0<\alpha<1$, so daß, wenn wieder A^0 die Menge der Punkte $q+\alpha\overrightarrow{qp}$, $p\in A$, bedeutet, $f(\bar{A}^0)$ in A liegt. Wir wollen nun zunächst zeigen:

I. Es gibt eine stetige Abbildung g von P in sich mit den Eigenschaften: $g(p)=f(p)$ für $p\in P-A^0$; $g(A^0)\subset A$; jeder Fixpunkt von g auf A^0 ist isoliert und im Innern eines Grundsimplexes von K gelegen.

Beweis von I. Aus $f(\bar{A}^0)\subset A$, der Kompaktheit von $\bar{A}^0$ und der Offenheit von A folgt die Existenz einer Zahl $\varepsilon>0$ derart, daß $f'(\bar{A}^0)\subset A$ für jede Abbildung f' von P in sich mit $\varrho(f,f')<\varepsilon$.

Aus $p\neq f(p)$, $p\in\bar{A}^0-A^0$, und der Kompaktheit von $\bar{A}^0-A^0$ folgt die Existenz von Zahlen η und ζ mit $\eta>0$ und $0<\zeta<1$ derart, daß $\varrho(p,f(p))>\eta$ in allen Punkten p aus $\bar{A}^0-A^\zeta$.

Einem bekannten Satz zufolge existiert eine Schar $(g^\tau,\ 0\leqq\tau\leqq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von P in sich mit $g^0=f$, $\varrho(f,g^\tau)<\min(\varepsilon,\eta)$, $0\leqq\tau\leqq 1$, und der Eigenschaft: jeder Fixpunkt der Abbildung g^1 ist isoliert und im Innern eines Grundsimplexes von K gelegen. Wegen $q=f(q)$ kann man überdies annehmen, daß g^1 auf A^0 wenigstens einen Fixpunkt besitzt.

Für $p\in P$ sei hierauf $\lambda(p)$ die Zahl

$$\varrho(p,P-A^0)/\big(\varrho(p,P-A^0)+\varrho(p,\bar{A}^\zeta)\big) \tag{1}$$

und $g(p)$ der Punkt $g^{\lambda(p)}(p)$. Die so bestimmte Abbildung g ist von der in I geforderten Art: In den Punkten p aus $P-A^0$ ist $\lambda(p)=0$, also $g(p)=g^0(p)=f(p)$. Wegen $\varrho(f,g^\tau)<\varepsilon$, $0\leqq\tau\leqq 1$, ist $\varrho(f,g)<\varepsilon$ und daher $g(\bar{A}^0)\subset A$. Für $p\in\bar{A}^0-A^\zeta$ ist $\varrho(p,f(p))>\eta$ und $\varrho(f(p),g(p))<\eta$, also $p\neq g(p)$; und auf $\bar{A}^\zeta$ stimmen g und g^1 überein, mithin: Jeder Fixpunkt von g auf A^0 ist isoliert und im Innern eines Grundsimplexes von K gelegen.

Weiter gilt, wenn $S_1,\ \ldots,\ S_m$ die Grundsimplexe von K mit N als Seite:

II. Es gibt eine stetige Abbildung f^1 von P in sich mit den Eigenschaften: $f^1(p)=f(p)$ für $p\in P-A^0$; $f^1(\bar{A}^0)\subset A$; ein im Innern von S_1 gelegener Punkt q^1 ist der einzige Fixpunkt von f^1 auf A^0.

Man kann nämlich, da K eindimensional zusammenhängend, die in A^0 liegenden Fixpunkte von g vermöge Satz 4 von $S_2+\cdots S_m$ ins Innere von S_1 verschieben, alsdann zusammenziehen.

Mit h bezeichnen wir die folgende Abbildung: $h(p) = f(p)$ für $p \in P - A^0$; $h(q) = q$;

$$h(p) = q + (1 - \sigma)\, \overrightarrow{q f w(p)},$$

wenn $p = q + (1-\sigma)\, q\, \overrightarrow{w(p)}$ ein Punkt aus $\bar{A}^0 - q$ und $w(p)$ den Schnittpunkt des Halbstrahles aus q durch p mit $\bar{A}^0 - A^0$ bezeichnet.

Nach dem letzten Hilfssatz existiert eine Schar $(f^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq \frac{1}{2})$ stetiger Abbildungen f^τ von P in sich mit den Eigenschaften: $f^\tau(p) = f(p)$ in allen (p, τ), für die entweder $p \in P$ und $\tau = 0$ oder $p \in P - A^0$ und $0 \leqq \tau \leqq \frac{1}{2}$; für $0 \leqq \tau \leqq \frac{1}{2}$ ist $f^\tau(\bar{A}^0)$ in A gelegen und der Punkt q, den wir auch mit q^τ bezeichnen, der einzige Fixpunkt von f^τ auf $\bar{A}^0$; es ist $f^\tau = h$ für $\tau = \frac{1}{2}$.

Eine nochmalige Anwendung des letzten Hilfssatzes, und zwar auf f^1, liefert eine Fortsetzung von $(f^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq \frac{1}{2};\ f^1)$ über $(\frac{1}{2}, 1)$, so daß gilt: Auch in den (p, τ) mit $p \in P - A^0$ und $\frac{1}{2} < \tau < 1$ ist $f^\tau(p) = f(p)$; auch für $\frac{1}{2} < \tau < 1$ ist $f^\tau(\bar{A}^0) \subset A$; für $\frac{1}{2} < \tau < 1$ ist der Punkt $(2 - 2\tau)\, q + (2\tau - 1)\, q^1$, den wir mit q^τ bezeichnen, der einzige Fixpunkt von f^τ auf $\bar{A}^0$.

Und damit ist Satz 5 bewiesen.

Fulda, Marienstr. 9.

(Eingegangen am 8. September 1953.)

Huckemann, F.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 375—382 (1954)

Bestimmung der Wertverteilung der Gammafunktion aus ihrer Riemannschen Fläche.

Von

Friedrich Huckemann.

In Betrachtungen über die Wertverteilung analytischer Funktionen geht man in neuerer Zeit häufig von Riemannschen Flächen aus und fragt nach den Eigenschaften der Funktionen, die sie erzeugen, insbesondere nach ihrer Wertverteilung; denn diese ist, als Verhalten der Funktion im Großen, am ehesten zugänglich. Im Anschluß an eine Untersuchung über das Verschmelzen von Randstellen[1]) will ich hier Aussagen über die Gammafunktion gewinnen, indem ich von ihrer Riemannschen Fläche ausgehe. Die Gammafunktion erzeugt nämlich eine Riemannsche Fläche aus einer Klasse, die unter anderem in der Erforschung des Umkehrproblems der Wertverteilung[2]) betrachtet wird. Mit einer ähnlichen wie der hier angewandten Methode können diese Flächen untersucht werden, darauf will ich an anderer Stelle eingehen. Hier soll gerade an einem Beispiel, das in der einen Blickrichtung (Schluß von der Funktion auf die Fläche) bekannt ist, gezeigt werden, wie man *von der Fläche als Gegebenheit* ausgehend zu Aussagen über die Funktion gelangen kann[3]).

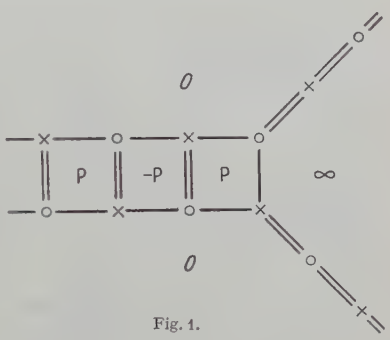

Fig. 1.

Sei p eine positive Zahl. Wir betrachten eine Fläche $\mathfrak{S}$, die verzweigt ist über den Grundpunkten $-p$, 0, p, ∞; sie habe *einen* logarithmischen Windungspunkt über ∞, *zwei* solche über 0, die durch ein Sinusende mit zweiblättrigen Windungspunkten über p, $-p$ getrennt werden; Fig. 1 zeigt den Streckenkomplex bezüglich der reellen Achse als Zerschneidungskurve. Schiebt man die algebraischen Windungspunkte weg von den Stellen p und $-p$ über gewisse Koordinaten $(-1)^\nu p_\nu$ ($p_\nu > 0$; $p_\nu \neq p_\mu$ für $\nu \neq \mu$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots$), wobei dem $(\nu+1)$-ten Elementargebiet im Sinusende der Windungspunkt über $(-1)^\nu p_\nu$ zugehört, so erhält man die von der Gammafunktion $\Gamma(z)$

[1]) Huckemann [1].
[2]) Ullrich [4].
[3]) Ullrich [5] hebt diese Betrachtungsweise besonders hervor.

erzeugte Fläche, die *Gammafläche* $\mathfrak{W}$. Im Intervall

$$-\nu < x < -\nu + 1 \quad \text{für} \quad \nu > 0,$$
$$-\nu + 1 < x < -\nu + 2 \quad \text{für} \quad \nu = 0$$

gibt es genau eine Stelle ξ_ν mit $\Gamma'(\xi_\nu) = 0$, weitere Nullstellen hat $\Gamma'(z)$ nicht. Nach einem Satz von HERMITE[4]) ist $\xi_\nu = -\nu + \frac{1}{\log \nu} + o\left(\frac{1}{\log \nu}\right) = -\nu + y_\nu$; für die verzweigten Sorten gilt

$$(1) \qquad p_\nu = (-1)^\nu \Gamma(\xi_\nu), \qquad \max_\nu (p_\nu) = p_1, \qquad \lim_\nu p_\nu = 0.$$

$\mathfrak{W}$ hat zwei logarithmische Enden und ein *sinoides* Ende, wie wir das deformierte Sinusende bezeichnen; die beiden auf $\mathfrak{S}$ getrennt liegenden logarithmischen Windungspunkte über Null sind über das sinoide Ende zu einer einzigen unmittelbaren Randstelle verschmolzen. Fig. 2 zeigt das Netz der Gammafläche für die reelle Achse als Zerschneidungskurve.

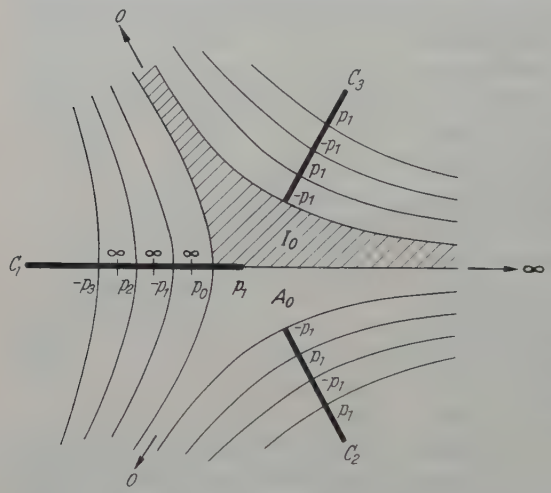

Fig. 2.

$\zeta(w)$ sei die Funktion, die die universelle Überlagerungsfläche der in $w_1 = 0$, $w_2 = p_1$, $w_3 = \infty$, $w_4 = -p_1$ punktierten Ebene in den Einheitskreis $\mathfrak{E}_\zeta$ abbildet. Dem in Fig. 2 schraffierten Viereck I_0 entspricht ein oberes Halbblatt $\mathfrak{I}_0$ von $\mathfrak{W}$; wir normieren $\zeta(w)$ so, daß ein Zweig $\underline{\zeta}(w)$ die Halbebene $\mathfrak{I}_0$ (im Sinne von Zielwerten) folgendermaßen abbildet

$$\underline{\zeta}(\infty) = 1, \qquad \underline{\zeta}(p_1) = -1,$$
$$\underline{\zeta}(0) = e^{2\pi i/3} = \varepsilon;$$

$\underline{\zeta}(-p_1) = a$, $|a| = 1$, ist dadurch festgelegt. Die Seiten werden in Orthokreisbogen des Einheitskreises abgebildet. Das Viereck I_0 und das über die Seite $\overline{p_0 \infty}$ anschließende Polygon A_0 bilden das Kernpolygon des Netzes der Gammafläche; über die Seite $\overline{0 - p_1 \infty}$ schließt sich sowohl an A_0 wie an I_0 je ein logarithmisches Ende an, über die Seiten $\overline{0 p_0}$ von A_0 und von I_0 das sinoide Ende der Gammafläche. Um $\underline{\zeta}(w)$ auf $\mathfrak{W}$ eindeutig zu machen, ziehen wir in den drei Enden je einen Schnitt C_j ($j = 1, 2, 3$)[5]) (stark ausgezogen in Fig. 2); C_1 beginnt im gemeinsamen Randpunkt p_1 von $\mathfrak{I}_0$ und $\mathfrak{A}_0$[6]), läuft

[4]) Siehe z.B. NIELSEN [2], S. 100.

[5]) j — ebenso der später einzuführende Index k — durchläuft die Zahlen 1, 2, 3, ν — ebenso der später einzuführende Index n — durchläuft die nichtnegativen ganzen Zahlen, wenn nichts anderes gesagt ist.

[6]) Die Kurvenpolygone des Netzes werden mit lateinischen Buchstaben bezeichnet, die Halbblätter von $\mathfrak{W}$ mit deutschen; zugeordnete Polygone und Halbblätter erhalten denselben Buchstaben.

über reelle Koordinaten zum Windungspunkt über p_0, von dort über reelle Koordinaten durch alle algebraischen Windungspunkte in das sinoide Ende hinein; der Schnitt C_2 bzw. C_3 beginnt in dem Randpunkt $-p_1$ von $\mathfrak{I}_0$ bzw. $\mathfrak{N}_0$ und läuft durch die Punkte über p_1 und $-p_1$ in der Weise in das logarithmische Ende hinein, daß die ζ-Bilder der Schnittufer Orthokreisbögen des Einheitskreises sind. Die aufgeschnittene Fläche werde $\underline{\mathfrak{W}}$ genannt. $\underline{\zeta}(w)$ bildet $\underline{\mathfrak{W}}$ ab in ein unendlich-vielseitiges Orthokreispolygon Q, es trägt Schnitte längs gewisser Orthokreisbogenstücke [weil die Windungspunkte von $\mathfrak{W}$ nicht alle über den singulären Stellen von $\zeta(w)$ liegen]; die Seiten häufen sich gegen die Punkte $\zeta = \varepsilon^k$ $(k = 1, 2, 3)$. In den Punkten $\zeta_1 = -1, \zeta_2 = \bar{a}$, $\zeta_3 = a$ entspringen je zwei Seitenzüge, ζ_j entspricht dem Anfangspunkt von C_j, die von ihm ausgehenden Seitenzüge entsprechen den beiden Schnittufern; der von ζ_j nach ε^k führende Seitenzug sei S_{jk} — hier kann k nur Werte annehmen, die sich mod 3 von j um 0 oder $+1$ unterscheiden —. Die Eckpunkte von $S_{22}, S_{23}, S_{33}, S_{31}$ entsprechen den Punkten $-p_1$ und p_1 abwechselnd, die Eckpunkte von S_{11}, S_{12} den Punkten $p_1, \infty, -p_1$. Mit ζ_{jk}^{ln} bezeichnen wir den $(n+1)$-ten Bildpunkt von w_l $(l = 2, 3, 4)$ auf S_{jk}; ζ_1 werde auch mit ζ_{11}^{20} oder ζ_{12}^{20} bezeichnet. Die Einschnitte liegen dann auf den Orthokreisen, die ζ_{1k}^{2n} und ζ_{1k}^{4n} mit ε^k verbinden $(k \neq 3;\ n \neq 0$ für $l = 4)$. Ein zusammenhängendes Stück auf einem der Seitenzüge $S_{22}, S_{23}, S_{33}, S_{31}$, das die ζ-Bilder aller Punkte genau einmal enthält, über denen überhaupt der zugehörige Schnitt läuft, soll *Fundamentalstück* heißen. Der ganze Seitenzug geht aus einem Fundamentalstück durch Potenzen einer parabolischen Transformation T_k des Einheitskreises hervor, die den Häufungspunkt des Seitenzuges zum Fixpunkt hat[7]). Ähnliches gilt für die Seitenzüge S_{11}, S_{12}.

Für die folgenden Abschätzungen ist es zweckmäßig, durch lineare Abbildung $\omega_k(\zeta)$ den Einheitskreis in die obere ω_k-Halbebene überzuführen; $\omega_k(\zeta)$ ist eindeutig bestimmt durch die Forderungen

a) $\omega_k(\varepsilon^k) = \infty$,

b) T_k entspreche die Schiebung $\omega_k + 1$,

c) $\omega_1(1) = \frac{1}{4}$, $\omega_2(1) = -\frac{1}{4}$, $\omega_3(-1) = 0$.

Hieraus folgen die Gleichungen $\omega_1(\zeta_1) = \omega_2(\zeta_1) = 0$, $\omega_1(\zeta_3) = \omega_3(\zeta_2) = \frac{1}{2}$, $\omega_2(\zeta_2) = \omega_3(\zeta_3) = -\frac{1}{2}$. Das ω_k-Bild von Q sei Q_k. In der ω_1- bzw. der ω_2-Ebene erhalten wir als Bild von S_{31} bzw. S_{22} die Halbkreisfolgen Σ_{31} bzw. Σ_{22}; als Bild von S_{11} bzw. S_{12} die Folge von Halbkreisen und Geradenstücken Σ_{11} bzw. Σ_{12}; die Geradenstücke sind der imaginären Achse parallel, wir nennen sie *Gräten*; die Figuren in der ω_1- und der ω_2-Ebene gehen durch Spiegelung an der imaginären Achse ineinander über. Σ_{23} und Σ_{33}, die Bilder von S_{23} und S_{33} in der ω_3-Ebene, sind einfache Halbkreisfolgen (Fig. 3a und b).

Für die Untersuchung der Wertverteilung von $\Gamma(z)$ ist es zunächst nötig, die Länge der Gräten in der ω_1- und der ω_2-Halbebene zu bestimmen; außer

[7]) T_k ist die primitive Transformation, bezüglich derer $\zeta(w)$ linear polymorph ist, das Vorzeichen setzen wir so fest, daß ihre positiven Potenzen den Rand des Einheitskreises in positiver Drehrichtung schieben.

der Kenntnis der verzweigten Sorten $(-1)^{\nu} p_{\nu}$ ist dazu die Kenntnis des asymptotischen Verhaltens der Funktionen $\omega_1(\zeta(w))$ und $\omega_2(\zeta(w))$ für $w \to 0$ erforderlich.

1. Man ersieht leicht, daß bei geeigneten Zweigfixierungen gilt:

$$\omega_1(\zeta(w)) = \frac{1}{4}\lambda^{-1}\left(\frac{w^2}{p_1^2}\right),$$

$$\omega_2(\zeta(w)) = \frac{1}{4}\left\{\lambda^{-1}\left(\frac{w^2}{p_1^2}\right)\right\}$$

— in beiden Zeilen sind natürlich verschiedene Zweige zu wählen —; λ^{-1} ist dabei die Umkehrung der bekannten Funktion $\lambda(\tau)$ aus der Theorie der

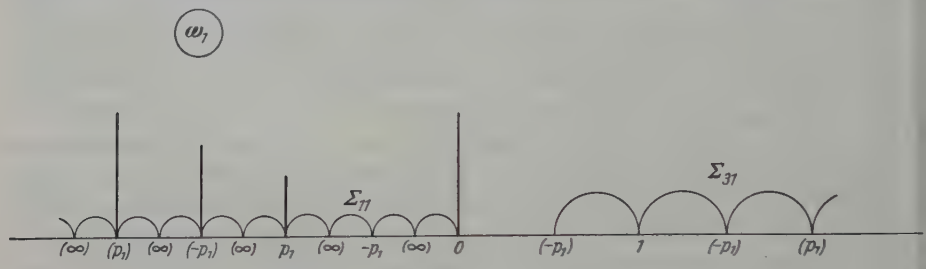

Fig. 3 a.

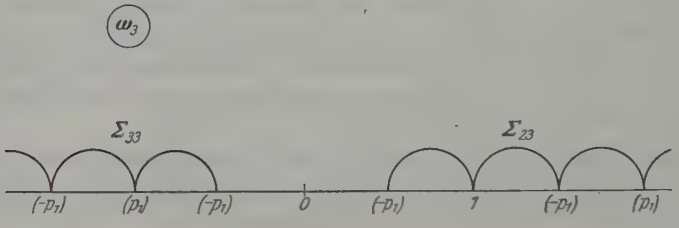

Fig. 3 b.

Modulfunktionen, deren Zusammenhang mit der absoluten Invariante $J(\tau)$ durch die Gleichung $J(\tau) = \frac{4}{27} \cdot \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}$ gegeben wird. Aus dem Zusammenhang mit den JACOBISchen ϑ-Funktionen und ihren Reihenentwicklungen folgt mit $e^{i\pi\tau} = h$

$$\lambda(\tau) = \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\right)^4 = u(h) = 16h + O(h^2),$$

bzw.

$$h = \frac{1}{16}u + O(u^2)$$

für kleine u und h. Also ist

$$\tau = -\frac{i}{\pi}\log h = -\frac{i}{\pi}\log u + O(1).$$

Somit ist die Länge l_{ν} der ν-ten Gräte gegeben durch

$$l_{\nu} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \log\frac{1}{p_{\nu}} + O(1). \tag{2}$$

2. Nach dem eingangs erwähnten Satz von HERMITE ist

$$p_\nu = (-1)^\nu \Gamma(\xi_\nu) = \frac{\pi}{\sin \pi y_\nu \cdot \Gamma(1+\nu-y_\nu)} = \frac{\log \nu\,(1+o(1))}{\Gamma(1+\nu+o(1))},$$

also

$$\log \frac{1}{p_\nu} = \nu \log \nu + O(\nu).$$

Damit erhalten wir aus (2) für die Längen der Gräten

$$l_\nu = \frac{1}{2\pi} \nu \log \nu + O(\nu).$$

Wir ziehen in der ω_k-Ebene Kreisbogen vom Radius ϱ mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt. Wir wählen P so groß, daß (für alle k) der Punkt $\omega_k = iP$ im Innern von Q_k liegt, im weiteren ist immer $\varrho > \mathrm{Max}(P, 1)$ anzunehmen. Das Kreisbogenstück vom Radius ϱ in der ω_k-Ebene, das ganz innerhalb Q_k liegt und die imaginäre Achse trifft, sei $B_\varrho^{(k)}$, seine Länge sei $\pi \lambda_k(\varrho) \cdot \varrho$; es ist

$$\lambda_3(\varrho) = 1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right). \tag{3}$$

Zur Bestimmung von $\lambda_1(\varrho)$ bzw. $\lambda_2(\varrho)$ betrachten wir den Winkel $\chi(\nu)$, den die imaginäre Achse in der ω_1- bzw. ω_2-Ebene mit dem Fahrstrahl zum ν-ten Grätenendpunkt ($\nu > 1$) einschließt, der Fahrstrahl selbst habe die Länge $\varrho(\nu)$. Dann gilt offenbar

$$\frac{\nu}{2\varrho(\nu)} \leq \chi(\nu) \leq \frac{\nu}{2l_\nu}.$$

Nun ist

$$\varrho(\nu) = \sqrt{\frac{1}{4\pi^2}\{\nu \log \nu + O(\nu)\}^2 + \frac{\nu^2}{4}} = \frac{1}{2\pi} \nu \log \nu + O(\nu), \tag{4}$$

also ist

$$\chi(\nu) = \frac{\pi}{\log \nu + O(1)}. \tag{5}$$

Um hier $\log \nu$ als Funktion von ϱ auszudrücken, sehen wir für den Augenblick in (4) ν als stetig veränderlich an, dann ist $\log \varrho = \log \nu + \log \log \nu + O(1)$, also $\log \nu = \log \varrho - \log \log \varrho + O(1)$. Es ist aber, wenn $\nu(\varrho)$ die Nummer der Gräte bezeichnet, auf der $B_\varrho^{(1)}$ bzw. $B_\varrho^{(2)}$ endet,

$$\lambda_1(\varrho) = \lambda_2(\varrho) = \chi(\nu(\varrho)) \cdot \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right),$$

also nach (5)

$$\lambda_1(\varrho) = \lambda_2(\varrho) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\log \varrho - \log \log \varrho + O(1)}. \tag{6}$$

Die w-Bilder der drei Bogen $B_\varrho^{(k)}$ fügen sich zu einer geschlossenen Kurve $B_{\varrho,w}$ auf $\mathfrak{W}$ zusammen, ihr entspricht durch $z = \Gamma^{-1}(w)$ eine geschlossene Kurve $B_{\varrho,z}$ in der z-Ebene. Wir setzen $\underset{B_{\varrho,z}}{\mathrm{Min}}\,|z| = u_1(\varrho)$, $\underset{B_{\varrho,z}}{\mathrm{Max}}\,|z| = u_2(\varrho)$. Der Modul des Vierecks $G_k(\varrho', \varrho'')$, das aus Q_k durch $B_{\varrho'}^{(k)}$ und $B_{\varrho''}^{(k)}$ als β-Bogen herausgehoben wird[8]), sei $\mu_k(\varrho', \varrho'')$, der Modul des Ringgebietes, das $B_{\varrho',z}$

[8]) Wir bilden $G_k(\varrho', \varrho'')$ so auf ein Rechteck ab, daß die „β-Bogen" $B_{\varrho'}^{(k)}$ und $B_{\varrho''}^{(k)}$ in parallele Seiten der Länge 2π übergehen, die Länge M der beiden anderen Seiten ist der obengenannte Modul. Vgl. hierzu und zum folgenden auch TEICHMÜLLER [3].

und $B_{\varrho'',z}$ einschließen, sei $M(\varrho', \varrho'')$. Es gilt dann

$$(7)\qquad \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{\mu_k(\varrho', \varrho'')} \leqq \frac{1}{M(\varrho', \varrho'')} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{\mu_k(\varrho, \varrho + d\varrho)} = \frac{1}{M(\varrho, \varrho + d\varrho)}.$$

Es ist aber

$$\mu_k(\varrho, \varrho + d\varrho) = \frac{2}{\lambda_k(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho},$$

bis auf die isolierten Unstetigkeitsstellen von $\lambda_k(\varrho)$. Aus der Gleichung

$$M(\varrho, \varrho + d\varrho) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{\mu_k(\varrho, \varrho + d\varrho)}} \geqq \frac{2}{\sum_{k=1}^{3} \lambda_k(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho}$$

folgt nach Integration

$$(8)\qquad M(\varrho', \varrho'') \geqq \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{2}{\sum_{k=1}^{3} \lambda_k(\varrho)} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho},$$

und damit erhalten wir eine untere Schranke für den Modul des Ringgebietes zwischen $B_{\varrho',z}$ und $B_{\varrho'',z}$.

Zur Abschätzung des Moduls nach oben ziehen wir in der ω_k-Ebene zwei stückweise glatte Kurven, $b_1^{(k)}$ in $Re(\omega_k) > 0$, $b_2^{(k)}$ in $Re(\omega_k) < 0$, die folgenden Forderungen genügen sollen:

a) sie enthalten nur Punkte des Innern oder des Randes von Q_k,

b) sie schneiden jeden Kreis vom Radius $\varrho > \mathrm{Max}(P, 1)$ (genau einmal) unter positivem Winkel.

$b_1^{(k)}$ und $b_2^{(k)}$ schneiden aus $G_k(\varrho', \varrho'')$ ein neues Viereck $\widetilde{G}_k(\varrho', \varrho'')$ aus. Der Teilbogen $\widetilde{B}_\varrho^{(k)}$ von $B_\varrho^{(k)}$, der innerhalb $\widetilde{G}_k(\varrho', \varrho'')$ liegt, habe die Länge $\pi \tilde{\lambda}_k(\varrho) \cdot \varrho$. Der Modul von $\widetilde{G}_k(\varrho', \varrho'')$ bezüglich $\widetilde{B}_{\varrho'}^{(k)}$ und $\widetilde{B}_{\varrho''}^{(k)}$ als β-Bogen ist dann nicht kleiner als $\mu_k(\varrho', \varrho'')$.

Als b_1^1, b_1^3 bzw. b_2^2, b_2^3 können wir die Parallele zur reellen Achse im Abstand $d \geqq \frac{1}{2}$ verwenden, soweit sie in der rechten bzw. der linken Halbebene liegt. In $Re(\omega_1) \leqq 0$ und in $Re(\omega_2) \geqq 0$ liegen Gräten, wir können für

$$b_2^1 \text{ die Kurve } \varphi(\varrho) = \pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\log \varrho - \log\log \varrho + K}\right),$$

$$b_1^2 \text{ die Kurve } \varphi(\varrho) = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\log \varrho - \log\log \varrho + K}\right), \qquad (\text{mit } \omega_k = \varrho e^{i\varphi})$$

wählen, wenn K hinreichend groß ist. Mit Hilfe quasikonformer Abbildung erhalten wir als Abschätzung nach oben [9])

$$(9)\qquad \mu_k(\varrho', \varrho'') \leqq \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{2}{\tilde{\lambda}_k} \left\{1 + \tau\left(\frac{d\tilde{\lambda}_k}{d\log\varrho}\right)^2\right\} \frac{d\varrho}{\varrho} + \varepsilon(\varrho'),$$

[9]) Vgl. z. B. HUCKEMANN [1], S. 23 bis 25 u. 30.

τ ist dabei eine geeignete Konstante, $\varepsilon(\varrho')$ eine mit $\varrho' \to \infty$ verschwindende Größe. Da nun

$$\tilde{\lambda}_3(\varrho) - \lambda_3(\varrho) = O\left(\frac{1}{\varrho}\right), \qquad \frac{d\tilde{\lambda}_3}{d\log\varrho} = O\left(\frac{1}{\varrho}\right),$$

$$\tilde{\lambda}_k(\varrho) - \lambda_k(\varrho) = O\left(\frac{1}{\log^2\varrho}\right), \qquad \frac{d\tilde{\lambda}_k}{d\log\varrho} = O\left(\frac{1}{\log^2\varrho}\right), \qquad (k = 1, 2),$$

ist, gilt an Stelle von (9) auch

$$\mu_k(\varrho', \varrho'') \leqq \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{2}{\lambda_k(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho} + \varepsilon(\varrho'). \tag{10}$$

Wegen $\lambda_1(\varrho) = \lambda_2(\varrho)$ ist auch

$$\frac{1}{\int \frac{2}{\lambda_1} \frac{d\varrho}{\varrho}} + \frac{1}{\int \frac{2}{\lambda_2} \frac{d\varrho}{\varrho}} = \frac{1}{\int \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{d\varrho}{\varrho}}.$$

Der Satz vom harmonischen Mittel ergibt hiermit

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{\int \frac{2}{\lambda_k(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho}} \geqq \frac{4}{\int \left\{ \frac{2}{\lambda_1(\varrho) + \lambda_2(\varrho)} + \frac{2}{\lambda_3(\varrho)} \right\} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho}},$$

mit (7) gilt also

$$M(\varrho', \varrho'') \leqq \frac{1}{2} \int_{\varrho'}^{\varrho''} \left\{ \frac{1}{\lambda_1(\varrho) + \lambda_2(\varrho)} + \frac{1}{\lambda_3(\varrho)} \right\} \frac{d\varrho}{\varrho} + \varepsilon(\varrho'). \tag{11}$$

Man errechnet unmittelbar, daß

$$\frac{2}{\sum_{k=1}^{3} \lambda_k(\varrho)} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\lambda_1(\varrho) + \lambda_2(\varrho)} + \frac{1}{\lambda_3(\varrho)} \right\} = O\left(\frac{1}{\log^2\varrho}\right)$$

ist. Wir vergleichen (8) mit (11) und erhalten nach Einsetzen der Werte von $\lambda_k(\varrho)$ die Beziehung

$$\left| M(\varrho', \varrho'') - \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{1}{1 + \frac{1}{\log\varrho - \log\log\varrho + O(1)}} \frac{d\varrho}{\varrho} \right| = \varepsilon(\varrho'). \tag{12}$$

Nach dem Modulsatz folgt hieraus[10])

$$u_i(\varrho) = C\, e^{f(\varrho)} \{1 + \varepsilon_i(\varrho)\} = C' \cdot \frac{\varrho}{\log\varrho} \{1 + \varepsilon_i(\varrho)\}, \qquad (i = 1, 2) \tag{13}$$

mit

$$f(\varrho) = \int^{\varrho} \frac{1}{1 + \frac{1}{\log\varrho - \log\log\varrho + O(1)}} \frac{d\varrho}{\varrho} = \log\varrho - \log\log\varrho + c + o(1),$$

wobei e^c, C, C' geeignete positive Zahlen sind.

Um die Wertverteilungsgrößen der Gammafunktion zu ermitteln, müssen wir die Funktion $u(r, a)$ bestimmen, die die Anzahl der a-Stellen im Kreis

[10]) Siehe z.B. TEICHMÜLLER [3].

$|z|<r$ angibt; wir können sie mit Hilfe von (13) aus der Anzahlfunktion $\nu(\varrho, a)$ berechnen, die die Zahl der a-Stellen innerhalb $B_{\varrho,z}$ mißt. Durch Übergang zu den ω_k-Ebenen entnehmen wir sogleich

$$(14)\qquad \begin{cases} \nu(\varrho, a) = 4\varrho\,(1+o(1)) & \text{für} \quad a \neq 0, \infty \\ \nu(\varrho, 0) = 0, & \nu(\varrho, \infty) = O\left(\dfrac{\varrho}{\log \varrho}\right). \end{cases}$$

$\nu_1(\varrho, a)$, die Anzahl der mehrfachen a-Stellen innerhalb $B_{\varrho,z}$ ist beschränkt für alle a (sie ist ≤ 1), dasselbe folgt damit für $n_1(r, a)$, die Anzahl der mehrfachen a-Stellen in $|z|<r$. Die Funktion $u_i(\varrho)$ ist eigentlich monoton, möglicherweise aber unstetig, wir definieren daher daneben eine Funktion $\bar{u}_i(\varrho)$; sie soll mit $u_i(\varrho)$ bis auf die Sprungstellen übereinstimmen, an diesen soll sie jedoch alle Werte zwischen den beiden Sprungordinaten (diese eingeschlossen) annehmen. Die (eindeutige) Umkehrfunktion $\varrho_i(r)$ von $\bar{u}_i(\varrho)$ bezeichnen wir kurz als Umkehrfunktion von $u_i(\varrho)$. Es gilt dann

$$\nu(\varrho_2(r), a) \leq n(r, a) \leq \nu(\varrho_1(r) + 0, a) + O(1).$$

Nach (13) ist $\varrho_i(r) = C_1 r \cdot \log r\,(1+\varepsilon_i(r))$ mit $C_1 > 0$, also

$$(15)\qquad n(r, a) = \nu\left(C_1 r \cdot \log r\,\{1+\varepsilon(r)\}, a\right) + O(1).$$

Das Wachstum der Charakteristik $T(r)$ ist gleich dem Wachstum von $n(r) = \operatorname{Max}_a n(r, a)$; nun folgt aus (14), (15) für die Wertverteilungsgrößen:

$$(16)\qquad \begin{aligned} T(r, \Gamma) &= C_2 r \cdot \log r\,(1+\varepsilon(r)) \qquad (C_2 > 0), \\ \delta(a) &= 1 - \overline{\lim}\,\frac{n(r,a)}{T(r)} = 0 \quad \text{für} \quad a \neq 0, \infty, \\ \delta(0) &= \delta(\infty) = 1, \\ \vartheta(a) &= \underline{\lim}\,\frac{n_1(r,a)}{T(r)} = 0 \qquad \text{für alle } a. \end{aligned}$$

Ein besseres Ergebnis als (16), also etwa die ganze STIRLINGsche Formel, kann nicht erwartet werden, denn schon der Zahlwert der Konstanten C, die in (13) auftritt, ist aus dem Modulsatz TEICHMÜLLERs, der an wesentlicher Stelle der Überlegungen verwandt wurde, nicht zu entnehmen; dieser ergibt nur die Existenz einer Zahl C. Hierin liegt der Grund, daß auch $C_2 = 1$ nicht zu erschließen war.

Literatur.

[1] HUCKEMANN, F.: Verschmelzung von Randstellen RIEMANNscher Flächen. Mitt. Math. Sem. Gießen **41**, 1—36 (1952). — [2] NIELSEN, N.: Handbuch der Theorie der Gammafunktion. Leipzig 1906. — [3] TEICHMÜLLER, O.: Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung. Dtsch. Math. **3**, 621—678 (1938). — [4] ULLRICH, E.: Zum Umkehrproblem der Wertverteilungslehre. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. I, N. F. **1**, 135—150 (1936). — [5] ULLRICH, E.: Flächenbau und Wachstumsordnung bei gebrochenen Funktionen. Jber. dtsch. Math. Ver. **46**, 232—274 (1936).

Gießen, Mathematisches Institut der Justus-Liebig-Hochschule.

(Eingegangen am 16. August 1953.)

Huckemann, F.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 383—387 (1954)

Typusänderung bei Riemannschen Flächen durch Verschiebung von Windungspunkten.

Von
Friedrich Huckemann.

Wohl das allgemeinste bisher bekannte Kriterium, das aus dem Streckenkomplex einer Riemannschen Fläche auf deren Typ schließen läßt, gab Wittich[1]); er setzte voraus, daß die Windungspunkte der Fläche über endlich vielen — etwa n — Grundpunkten liegen. Ihre spezielle Lage hat dann keinen Einfluß auf den Typus, vielmehr können sie durch eine quasikonforme Abbildung, die den Typus nicht ändert, über die n-ten Einheitswurzeln gebracht werden; die neue Fläche ist der analytischen Behandlung einfacher zugänglich, auf diese Weise kann der Typus der ursprünglichen Fläche bestimmt werden.

Verschiebt man die Windungspunkte nun ein wenig, jedoch in der Weise, daß sie nun über *unendlich vielen* Grundpunkten liegen, so gibt das Wittichsche Kriterium keine Auskunft mehr. Ist die Verschiebung klein, so wird man annehmen, daß der Typus sich nicht ändert. Es stellt sich aber die Frage, ob eine Verschiebung unendlich vieler Windungspunkte den Typus einer Riemannschen Fläche überhaupt beeinflußt. Das ist tatsächlich der Fall: wir werden das Umspringen des Typus durch eine stetige Deformation erreichen.

Wir gehen aus von einer Fläche $\mathfrak{S}$ mit Verzweigungspunkten über -1, 0, 1, ∞, die im Bau verwandt ist der universellen Überlagerungsfläche der in diesen Punkten punktierten Ebene. Im Streckenkomplex ist — wie dort — jeder Knoten vollständig verzweigt, doch wird die Rolle der einfachen Glieder von viereckigen Elementargebieten übernommen. Den Streckenkomplex von $\mathfrak{S}$ bezüglich der reellen Achse als Zerschneidungskurve konstruieren wir folgendermaßen: Vier Sinusleitern werden kreuzförmig zusammengefügt, die zwei einander gegenüberliegenden werden gebildet aus vierseitigen Elementargebieten, die abwechselnd Windungspunkten über 0 und $+1$ bzw. über 0 und -1 entsprechen; alle vierLeitern treffen sich in einem der Null zugehörigen Elementargebiet (im folgenden kurz *Null-Elementargebiet* genannt), wir nennen sie *Sinusenden nullter Ordnung* (Fig. 1). In jedem der vier Enden nullter Ordnung, das Elementargebiete zu 0 und $(-1)^k$ ($k=0$ bzw. 1) trägt, hängen wir an jedes Null-Elementargebiet zwei weitere Sinusleitern an mit Elementargebieten zu 0 und $(-1)^{k+1}$, die *Sinusenden erster Ordnung*; an jedes freie Null-Elementargebiet der Sinusenden erster Ordnung fügen wir nach der oben angegebenen Vorschrift zwei weitere Sinusleitern an, die Sinusenden zweiter Ordnung, hier wieder an jedes freie Null-Elementargebiet die Sinusenden dritter Ordnung, und so fort. In der Grenze erhalten wir den Streckenkomplex

[1]) Wittich [3].

der Fläche $\mathfrak{S}$, bei dem in jedem Null-Elementargebiet vier Sinusleitern zusammenstoßen. Die logarithmischen Elementargebiete sollen logarithmischen Windungspunkten über ∞ entsprechen. Die Funktion $s(z)$, die diese Fläche erzeugt, gewinnen wir durch analytische Fortsetzung derjenigen Funktion, die die Viertelebene $I(s) > 0$, $Re(s) < 0$ als Bild eines Polygons aus Orthokreisen des Einheitskreises E_z in der z-Ebene entwirft; es sollen die Eckpunkte $z = 1, (\sqrt{2}-1)e^{i\pi/4}, 0$ übergehen in $s = \infty, -1, 0$. Dem nullwinkligen Kreisbogenpolygon P_0 mit den Ecken in $1, i, -1, -i$ entsprechen zwei Blätter der s-Ebene, die im Nullpunkt durch einen zweiblättrigen Windungspunkt zusammengehalten werden, beide sind aufgeschnitten längs der Geraden $-\overline{1\,\infty}$ und $+\overline{1\,\infty}$. Bei der Abbildung der oben erwähnten universellen Überlagerungsfläche in E_z würde *eine* Halbebene in P_0 übergehen, hier sind es vier, die im Nullpunkt durch einen zweiblättrigen Windungspunkt zusammenhängen; das kennzeichnet die Verwandtschaft zwischen diesen beiden Flächen. $\mathfrak{S}$ hat unendlich viele (zweiblättrige) algebraische Windungspunkte über $-1, 0, 1$ und unendlich viele logarithmische über ∞; $s(z)$ bildet E_z ab auf $\mathfrak{S}$, also ist $\mathfrak{S}$ vom hyperbolischen Typ.

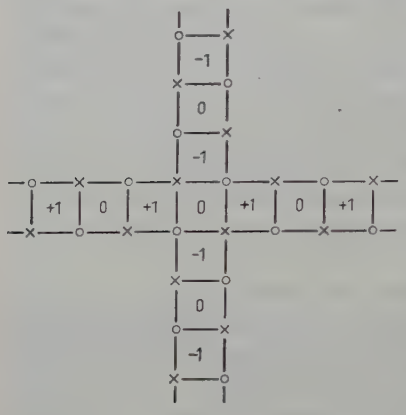

Fig. 1.

Wir schöpfen den Streckenkomplex aus durch die Generationenfolge der Elementargebiete; bei einem beliebigen Null-Elementargebiet (nullte Generation) fangen wir an zu zählen; die vier daran anschließenden algebraischen Elementargebiete (je zwei zu $+1$ und zu -1) bilden die erste Generation, die vier an diese anschließenden Null-Elementargebiete die zweite Generation, an sie schließen sich $3 \cdot 4$ Elementargebiete der dritten Generation usw. Allgemein enthält $(n \geq 1)$ die $2n$-te Generation $3^{n-1} \cdot 4$ Elementargebiete zu Null, die $(2n-1)$-te Generation $3^{n-1} \cdot 4$ Elementargebiete zu ± 1. Zur n-ten Knotengeneration fassen wir alle Knoten zusammen, die ein Null-Elementargebiet der $2n$-ten Generation beranden. Die Generationenfolge überträgt sich in bekannter Weise auf die Elemente der RIEMANNschen Fläche.

Schieben wir die algebraischen Windungspunkte der $(2\nu-1)$-ten Generation weg von den Koordinaten ± 1 nach $\pm p_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots;\ p_\nu \nearrow \infty$ [2]), so *verschmelzen die unendlich vielen logarithmischen Windungspunkte zu einer einzigen Randstelle über* ∞ und aus den Sinusenden werden *sinoide*; es entsteht eine RIEMANNsche Fläche $\mathfrak{W}$, die von $w(z)$ erzeugt werde.

Bei Flächen des parabolischen Typus kann ein Verschmelzen von Randstellen die Wachstumsordnung der erzeugenden Funktion herabdrücken[3]), es

[2]) Das Zeichen $\nearrow$ bedeutet: monoton wachsend. Die Monotonievoraussetzung wird der Einfachheit halber angenommen.

[3]) HUCKEMANN [1].

liegt nahe, die Frage aufzuwerfen, ob es möglich sei, auf dieselbe Weise vom hyperbolischen Typ zum parabolischen zu kommen.

Wir zerschneiden $\mathfrak{W}$ durch Schnitte, die von jedem Windungspunkt über Null aus in die vier anstoßenden (jetzt) sinoiden Enden über reellen Koordinaten hineinlaufen, dann zerfällt $\mathfrak{W}$ in unendlich viele Flächenstücke $F_{\mu\varkappa}$, jedes hat eine Randstelle über ∞, die ein logarithmischer Windungspunkt wäre, wenn wir die Sinusenden nicht deformiert hätten; jedes entspricht umkehrbar eindeutig der *ein* logarithmisches Elementargebiet berandenden Knotenfolge. In jedem $F_{\mu\varkappa}$ ist $\zeta = \log w$ eine eindeutige Funktion, die es in die endliche ζ-Ebene abbildet; die ζ-Ebene trägt außerdem Schnitte — die Bilder der auf $\mathfrak{W}$ gezogenen Schnitte sind — auf Parallelen zur reellen Achse im Abstand π. Die Figur ist symmetrisch zu einer Geraden, die wir durch Addition einer passenden Konstanten c zur reellen Achse machen (Fig. 2*)). Es sei F_μ die Menge aller Flächenstücke, die von Windungspunkten der Generation 2μ noch berührt werden, d.h. bei denen jeder algebraische Windungspunkt auf dem Rand einer Generation $\geq 2\mu$, jedoch wenigstens einer der Generation 2μ selbst angehört. Für $\mu \geq 1$ hat F_μ die Anzahl $k(\mu) = 2 \cdot 3^{\mu-1} \cdot 4$ von Elementen $F_{\mu\varkappa}$, F_0 hat $k(0) = 4$ Elemente $F_{0\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, k(\mu))$. Alle $F_{\mu\varkappa}$ mit gleichem μ sind kongruent. Das Bild, das $\tilde{\zeta} = \log w + c$ von $F_{\mu\varkappa}$ entwirft, sei $F_{\mu\varkappa}^{\tilde{\zeta}}$.

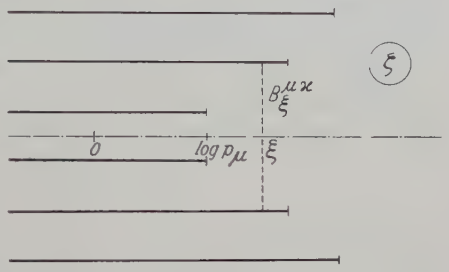

Fig. 2.

Wir setzen $\zeta = \xi + i\eta$ und bezeichnen, falls $\xi \neq \log p_\nu$ ist, mit $B_\xi^{\mu\varkappa}$ dasjenige zur reellen Achse symmetrische Stück der Geraden $Re(\zeta) = \xi$, das ganz innerhalb $F_{\mu\varkappa}^{\tilde{\zeta}}$ liegt; für $\xi = \log p_\nu$ sei $B_\xi^{\mu\varkappa} = \lim_{\xi \to \log p_\nu - 0} B_\xi^{\mu\varkappa}$; die Länge von $B_\xi^{\mu\varkappa}$ sei $\pi\, l_\mu(\xi)$. $l_\mu(\xi)$ ist stückweise konstant. Es ist

$$l_\mu(\xi) = 1 \quad \text{für} \quad \xi \leq \log p_{\mu+1},$$
$$l_\mu(\xi) = 2(\nu - \mu) + 1 \quad \text{für} \quad \log p_\nu < \xi \leq \log p_{\nu+1}, \quad \nu \geq \mu + 1.$$

Es bezeichne $m(\xi)$ das kleinste μ, das die Ungleichung $\log p_{\mu+1} \geq \xi$ erfüllt. Dann ist $\tilde{\zeta}^{-1}\left(\sum_{\mu=0}^{m(\xi)} \sum_{\varkappa=1}^{k(\mu)} B_\xi^{\mu\varkappa}\right)$ eine geschlossene Kurve B_ξ auf $\mathfrak{W}$, und zwar ein mehrfach durchlaufener Kreis.

Die Zahlen $\xi_1 < \xi_2$ seien zunächst dem Intervall $\log p_{\nu-1} < \xi < \log p_\nu$ entnommen; dann gilt für den Modul $M(\xi_1, \xi_2)$ des Ringgebietes, das B_{ξ_1} und B_{ξ_2} begrenzen, die Beziehung

$$M(\xi_1, \xi_2) = \frac{2}{l(\xi)} (\xi_2 - \xi_1)$$

mit

$$l(\xi) = \sum_{\mu=0}^{m(\xi)} k(\mu) \cdot l_\mu(\xi) = 4 l_0(\xi) + 2 \cdot 4 \cdot \sum_{\mu=1}^{m(\xi)} 3^{\mu-1} \cdot l_\mu(\xi).$$

*) Corrigendum: In Fig. 2 ist $\log p_\mu$ durch $\log p_{\mu+1}$ zu ersetzen.

Nun ist $l_\mu(\xi) = 2(m(\xi) - \mu) + 1$ für $\mu \leq m$, setzt man dies oben ein, so ergibt sich

$$l(\xi) = 3^{m(\xi)} \cdot 8 - 4,$$

und es ist also

$$M(\xi_1, \xi_2) = \frac{\xi_2 - \xi_1}{2 \cdot (2 \cdot 3^{m(\xi)} - 1)}.$$

Aus den bekannten Eigenschaften des Moduls folgt nun für *beliebige* $\xi' < \xi''$[4]:

$$M(\xi', \xi'') \geq \frac{1}{2} \int_{\xi'}^{\xi''} \frac{d\xi}{2 \cdot 3^{m(\xi)} - 1}. \tag{1}$$

Es ist $m(\xi)$ gleichzeitig die um 1 verminderte halbe Anzahl der zur reellen Achse parallelen Schnitte, die $B_x^{0\varkappa}$ ($\varkappa = 1, 2, 3, 4$) trifft, wenn x von $-\infty$ bis ξ zunimmt. Wächst $m(\xi)$ sehr langsam, verschmelzen also die Randstellen sehr kräftig, so divergiert das Integral (1) mit $\xi'' \to \infty$, und die Fläche $\mathfrak{W}$ ist alsdann vom parabolischen Typ. Man kann etwa wählen

$$m(\xi) \leq \frac{\log \xi}{\log 3} \quad \text{oder} \quad \log p_\mu \geq e^{3^\mu}.$$

Umgekehrt fragen wir: Wie lange, also bis zu welcher Stärke des Anwachsens von $m(\xi)$, kann noch der hyperbolische Typ garantiert werden? Zur Beantwortung bilden wir $\mathfrak{W}$ quasikonform ab auf eine Fläche, die erwiesenermaßen hyperbolischen Typ hat, zweckmäßig wird das $\mathfrak{S}$ sein. Wir verbinden in $F_{\mu\varkappa}^{\zeta}$ die Endpunkte zweier benachbarter Schnitte durch Geraden; der ganze Streckenzug, den man so erhält, sei gegeben durch $\xi = g(\eta)$; durch

$$\zeta^* = \xi - g(\eta) + i\eta$$

wird $F_{\mu\varkappa}^{\zeta}$ quasikonform bezogen auf $F_{\mu\varkappa}^{\zeta^*}$; der Dilatationsquotient der Abbildung ist $K + \sqrt{K^2 - 1}$, wo $K = 1 + \frac{g'^2}{2}$ ist. Die Funktion $z = s^{-1}(\zeta^*(\tilde{\zeta}(w)))$ bildet $\mathfrak{W}$ quasikonform in $|z| < 1$ ab. $C(z)$ sei eine Schranke für den Dilatationsquotienten im Punkte $z = x + iy$; konvergiert dann $\int_{|z|<1} C(z)\, dx\, dy$, so hat $\mathfrak{W}$ sicher hyperbolischen Typ.

Zur Abschätzung des Dilatationsquotienten müssen wir die Abbildung $\mathfrak{S} \longleftrightarrow E_z$ genauer betrachten. Die vier Halbblätter, die um den Windungspunkt Null der nullten Generation zusammenhängen, werden, werden abgebildet auf ein nullwinkliges Orthokreispolygon mit den Ecken in $1, i, -1, -i$. Fortgesetzte Spiegelung der Figur schöpft E_z durch vierseitige Orthokreispolygone aus, deren jedes vier Halbblättern von $\mathfrak{S}$ entspricht. Wir wollen den Rand des Polygons, das das s^{-1}-Bild aller Knoten bis zur n-ten Generation ist, $\mathfrak{R}_n$ nennen; auf $\mathfrak{R}_n$ liegen die Windungspunkte der $(2n+1)$-ten Generation. Im Gebiet zwischen $\mathfrak{R}_n$, $\mathfrak{R}_{n-1}$, für dessen Flächeninhalt man die elementare Abschätzung $O(n^{-2})$ findet, hat der Dilatationsquotient D einen Wert $\leq \left(\log \frac{p_{n+1}}{p_n}\right)^2 + 2$.

[4]) TEICHMÜLLER [2].

Es liegt also der hyperbolische Typus vor, solange

$$\sum^{\infty} \left(\log \frac{p_{n+1}}{p_n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n^2}$$

konvergiert, also beispielsweise wenn $p_n \leqq e^{n^\alpha}$ und $\alpha < \frac{1}{2}$ ist.

Als Ergebnis formulieren wir den

Satz. Gegeben sei die durch Aneinanderfügen oberer und unterer Halbebenen entstandene vollständig verzweigte einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche $\mathfrak{F}$ mit zweiblättrigen Windungspunkten über $-1, 0, 1$ und logarithmischen über ∞; die algebraischen Windungspunkte seien in Generationen geordnet. Verschiebt man die über ± 1 liegenden Windungspunkte der $(2n-1)$-ten Generation über andere Koordinaten $\pm p_n$ ($p_n \geqq 1$, $p_n \nearrow \infty$), so verschmelzen die logarithmischen Windungspunkte zu einer einzigen Randstelle über ∞. Ist die Konvergenz $p_n \to \infty$ schwach — genauer: konvergiert $\sum_1^{\infty} \left(\log \frac{p_{n+1}}{p_n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n^2}$ — so hat die Fläche noch hyperbolischen Typ; ist sie stark — genauer: divergiert $\int^{\infty} \frac{d\xi}{3^{m(\xi)}}$ mit $m(\xi) = \max_n (\log p_n < \xi)$ — so springt der Typ zum parabolischen.

Literatur.

[1] Huckemann, F.: Verschmelzung von Randstellen Riemannscher Flächen. Mitt. Math. Sem. Gießen **41**, 1—36 (1952). — [2] Teichmüller, O.: Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung. Dtsch. Math. **3**, 621—678 (1938). — [3] Wittich, H.: Über die konforme Abbildung einer Klasse Riemannscher Flächen. Math. Z. **45**, 642—668 (1939).

Gießen, Mathematisches Institut der Justus-Liebig-Hochschule.

(Eingegangen am 26. August 1953.)

Meinardus, G.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 388—398 (1954)

Asymptotische Aussagen über Partitionen.

Von
Günter Meinardus.

Im Jahre 1941 bewies Ingham [1] ein Tauberscher Theorem, welches gestattet, für eine Anzahl von Partitionenfunktionen asymptotische Beziehungen herzuleiten. Man erhält jedoch im allgemeinen keine asymptotische Gleichung, sondern nur dann, wenn die Partitionenfunktion monoton wächst. Dies entspricht der Natur eines solchen Tauberschen Theorems. Faßt man es nämlich als Umkehrung eines entsprechenden Abelschen Satzes auf, so wird man neben den funktionentheoretischen Voraussetzungen noch zusätzlich eine Annahme über ein monotones Wachstum einer gewissen summatorischen Funktion machen müssen.

Im folgenden soll ein Satz über Partitionen bewiesen werden, der ein monotones Wachstum der Anzahlfunktion nicht zur Voraussetzung hat. Betrachtet wird die Anzahl aller additiven Zerlegungen einer Zahl in natürliche Zahlen, welche noch mit einer Vielfachheit versehen sind. Ein Vergleich mit dem Theorem von Ingham zeigt, daß hier die funktionentheoretischen Voraussetzungen etwas schärfer sind, abgesehen davon, daß der Satz von einer spezielleren Darstellung der erzeugenden Funktion ausgeht. Der Vorteil liegt in dem oben erwähnten Verzicht auf das monotone Wachstum. Ferner ergibt sich ein, wenn auch schwaches, additives Fehlerglied.

Als erste Anwendung erhält man eine asymptotische Gleichung für die Anzahl aller Partitionen einer Zahl in natürliche Zahlen einer teilerfremden Restklasse nach einem festen Modul. Es folgen weitere Anwendungen, bei denen für die Summanden der Zerlegungen ein fester Wert des Legendreschen Restsymbols bzw. des Kronecker-Symbols vorgeschrieben wird. Endlich ergeben sich Limesbeziehungen für gewisse Quotienten von Partitionenfunktionen, wie sie zum Teil schon von H. Petersson auf anderem Wege gefunden worden sind (vgl. die Fußnote zum Satz 4).

Der Beweis des Satzes beruht auf der Sattelpunktmethode. Es werden keine Transformationseigenschaften der erzeugenden Funktion gegenüber den Substitutionen der Modulgruppe benutzt.

Satz 1. 1. Es sei das Produkt

$$f(\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-n\tau})^{-a_n}$$

konvergent für $\Re(\tau) > 0$ und besitze die Entwicklung

$$f(\tau) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r(n)\, e^{-n\tau}.$$

Die Exponenten a_n seien reelle, nichtnegative Zahlen.

2. Es sei die DIRICHLETsche Reihe

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \qquad (s = \sigma + it)$$

konvergent für $\sigma > \alpha > 0$. Ferner sei $D(s)$ analytisch fortsetzbar bis zur Geraden $\sigma = -c_0$ mit $0 < c_0 < 1$. Für $\sigma \geqq -c_0$ sei $D(s)$ regulär bis auf die Stelle $s = \alpha$, wo ein Pol erster Ordnung mit dem Residuum A vorliege, und es gelte gleichmäßig in σ die Abschätzung

$$D(s) = O(|t|^{c_1})$$

für $|t| \to \infty$, wobei c_1 eine positive Konstante sei.

3. Es sei $\tau = y + 2\pi i x$ die Zerlegung von τ in Real- und Imaginärteil, $y > 0$ und

$$g(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n\tau}.$$

Für $|\arg \tau| > \frac{\pi}{4}$, $|x| \leqq \frac{1}{2}$ gelte

$$\Re(g(\tau)) - g(y) \leqq -c_2 y^{-\varepsilon}$$

für hinreichend kleines y, mit beliebigem festen positiven ε und geeignetem $c_2 > 0$.

Dann folgt

$$r(n) = C \cdot n^{\varkappa} \cdot e^{n^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \cdot \left(1+\frac{1}{\alpha}\right) \cdot (A\Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1))^{\frac{1}{\alpha+1}}} \cdot \left(1 + O\left(n^{-\varkappa_1}\right)\right)$$

für $n \to \infty$. Hier ist $\zeta(s)$ die RIEMANNsche Zetafunktion und

$$C = e^{D'(0)} \cdot (2\pi(1+\alpha))^{-\frac{1}{2}} \cdot (A\Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1))^{\frac{1-2D(0)}{2(1+\alpha)}}$$

$$\varkappa = \frac{2D(0) - 2 - \alpha}{2(1+\alpha)}$$

$$\varkappa_1 = \frac{\alpha}{\alpha+1} \operatorname{Min}\left(\frac{c_0}{\alpha} - \frac{\delta}{4}, \frac{1}{2} - \delta\right),$$

δ beliebig > 0.

Beweis. Aus der Entwicklung von $f(\tau)$ nach Potenzen von $e^{-\tau}$ entnehmen wir für $y > 0$ die Integraldarstellung

$$r(n) = e^{ny} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(y + 2\pi i x)\, e^{2\pi i n x}\, dx \qquad (n > 0). \tag{1}$$

Wir wählen

$$y = n^{\alpha+1} \cdot (A\Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1))^{\alpha+1}. \tag{2}$$

Es ist $y > 0$, denn es ist $A > 0$, wie sich aus der Voraussetzung 2. des Satzes ergibt. Ferner führen wir noch die Abkürzungen ein

$$m = n^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \cdot (A\Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1))^{\frac{1}{\alpha+1}} \tag{3}$$

und

$$\beta = 1 + \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \quad \text{mit} \quad 0 < \delta < \frac{2}{3}. \tag{4}$$

Offenbar ist

$$1 + \frac{\alpha}{3} < \beta < 1 + \frac{\alpha}{2},$$

wovon wir später Gebrauch machen werden. Unter $c_3, c_4, \ldots$ sollen im folgenden stets geeignet wählbare positive Konstanten verstanden werden, die eventuell noch von $A, \alpha, c_0, c_1, c_2, \varepsilon$ und δ abhängen.

Aus (1) folgt

$$r(n) = e^m \cdot \int_{-y^\beta}^{+y^\beta} f(y + 2\pi i x)\, e^{2\pi i n x}\, dx + e^m R_1 \tag{5}$$

mit

$$R_1 = \left\{ \int_{-\frac{1}{2}}^{-y^\beta} + \int_{+y^\beta}^{+\frac{1}{2}} \right\} f(y + 2\pi i x)\, e^{2\pi i n x}\, dx.$$

Hier sei $n \geqq n_1$ und n_1 so groß, daß $y^\beta \leqq \frac{1}{2}$ ist. Zur Approximation von $f(\tau)$ in den drei Integrationsintervallen benutzen wir den folgenden

Hilfssatz. Unter den Voraussetzungen von Satz 1 ist

a) für $|\arg \tau| \leqq \frac{\pi}{4}$, $|x| \leqq \frac{1}{2}$ gleichmäßig in x

$$f(\tau) = e^{\frac{A\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha+1)}{\tau^\alpha} - D(0)\log\tau + D'(0) + O(y^{c_0})}$$

für $y \to 0$;

b) für ein gewisses $\varepsilon_1 > 0$, $y^\beta \leqq |x| \leqq \frac{1}{2}$ gleichmäßig in x

$$f(y + 2\pi i x) = O\left(e^{\frac{A\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha+1)}{y^\alpha} - c_5 y^{-\varepsilon_1}}\right)$$

für $y \to 0$.

Um diese Abschätzungen zu beweisen, beachten wir zunächst, daß

$$\log f(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\, e^{-\nu k \tau}$$

ist, was auf Grund der Produktdarstellung von $f(\tau)$ sofort festgestellt werden kann. Eine Anwendung der Formel

$$e^{-\tau} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \tau^{-s}\, \Gamma(s)\, ds \qquad (\Re(\tau) > 0,\ \sigma_0 > 0)$$

ergibt

$$\log f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\alpha-i\infty}^{1+\alpha+i\infty} \tau^{-s}\, \Gamma(s)\, \zeta(s+1)\, D(s)\, ds,$$

wobei die Vertauschungen von Summation und Integration wegen der absoluten Konvergenz der Doppelreihe erlaubt sind. Nun ist für $|\arg \tau| \leq \frac{\pi}{4}$ offenbar

$$|\tau^{-s}| \leq |\tau|^{-\sigma} \cdot e^{\frac{\pi}{4}|t|}.$$

Ferner gelten im Streifen $-c_0 \leq \sigma \leq 1-\alpha$ gleichmäßig in σ die Abschätzungen

$$D(s) = O\left(|t|^{c_1}\right), \qquad \zeta(s+1) = O\left(|t|^{c_1}\right)$$

und

$$\Gamma(s) = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|t|} \cdot |t|^{c_3}\right)$$

für $|t| \to \infty$. Es ist also gestattet, die Integrationsgerade im obigen Integral nach $\sigma = -c_0$ zu verschieben. Wegen $0 < c_0 < 1$ treten hierbei die Residuen des Integranden bei $s = \alpha$ und $s = 0$ auf. Es gilt für den Pol erster Ordnung bei $s = \alpha$ nach Voraussetzung

$$\operatorname*{Res}_{s=\alpha} \{\tau^{-s}\Gamma(s)\zeta(s+1)D(s)\} = \frac{A\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha+1)}{\tau^{\alpha}}$$

und für den Pol zweiter Ordnung bei $s = 0$, wie man leicht nachprüft,

$$\operatorname*{Res}_{s=0} \{\tau^{-s}\Gamma(s)\zeta(s+1)D(s)\} = D'(0) - D(0)\log\tau.$$

Weiter gilt auf Grund der angegebenen Abschätzungen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-c_0-i\infty}^{-c_0+i\infty} \tau^{-s}\Gamma(s)\zeta(s+1)D(s)\,ds = O\left(|\tau|^{c_0}\right) = O\left(y^{c_0}\right),$$

denn es ist $|\arg \tau| \leq \frac{\pi}{4}$. Daraus ergibt sich der Teil a) des Hilfssatzes.

Es sei nun y so klein angenommen, daß $y^{\beta} \leq \frac{y}{2\pi}$ ist. Für das Intervall $y^{\beta} \leq |x| \leq \frac{y}{2\pi}$ folgt aus dem eben Bewiesenen bereits

$$\begin{aligned}\log|f(y+2\pi i x)| &\leq \\ &\leq \frac{A\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha+1)}{y^{\alpha}} + \frac{A\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha+1)}{y^{\alpha}}\left(\frac{1}{(1+4\pi^2x^2y^{-2})^{\alpha/2}} - 1\right) + c_6|\log y| \\ &\leq \frac{A\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha+1)}{y^{\alpha}} - c_7 y^{-\alpha+2(\beta-1)}\end{aligned}$$

für hinreichend kleines y. Nach (4) ist $-\alpha+2(\beta-1) = -\frac{\alpha\delta}{2}$, so daß

$$\log|f(y+2\pi i x)| \leq \frac{A\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha+1)}{y^{\alpha}} - c_8 y^{-e_4}$$

wird. Für das restliche Intervall $\frac{y}{2\pi} \leq |x| \leq \frac{1}{2}$ ist

$$\log|f(y+2\pi i x)| \leq \log f(y) + \Re\left(g(\tau)\right) - g(y),$$

denn die a_ν sind $\geqq 0$. Nach Voraussetzung 3. von Satz 1 und Teil a) des Hilfssatzes ergibt sich wiederum

$$\log|f(y+2\pi i x)| \leqq \frac{A\,\Gamma(\alpha)\,\zeta(\alpha+1)}{y^\alpha} - c_8\, y^{-\varepsilon} \leqq \frac{A\,\Gamma(\alpha)\,\zeta(\alpha+1)}{y^\alpha} - c_3\, y^{-\varepsilon_1}.$$

Damit ist auch der Teil b) des Hilfssatzes bewiesen.

Nun zurück zum Beweis von Satz 1. Wir setzen wieder $y = m/n$ gemäß (2) und (3). Dann ergibt der Hilfssatz

$$R_1 = O\left(e^{\left(\frac{n}{m}\right)^\alpha A\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha+1) - c_3\left(\frac{n}{m}\right)^{\varepsilon_1}}\right)$$

für $n \to \infty$. Mit (3) folgt für ein festes $\varepsilon_2 > 0$ die Abschätzung

$$e^m \cdot R_1 = O\left(e^{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)m - c_9 m^{\varepsilon_2}}\right) \tag{6}$$

für $n \to \infty$. Es bleibt noch das erste Integral von (5) zu betrachten. Es sei $n \geqq n_2 \geqq n_1$, und n_2 so groß, daß $2\pi(m/n)^{\beta-1} \leqq 1$ ist. Dann liefert der Hilfssatz

$$r(n) = e^{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)m + D'(0)} \cdot \int_{-(m/n)^\beta}^{+(m/n)^\beta} e^{\varphi_1(x)}\,dx + e^m \cdot R_1,$$

mit

$$\varphi_1(x) = \frac{m}{\alpha}\left\{\left(1 + \frac{2\pi i x n}{m}\right)^{-\alpha} - 1\right\} + 2\pi i n x - D(0)\log\left(\frac{m}{n} + 2\pi i x\right) + O\left(m^{-\frac{c_0}{\alpha}}\right)$$

für $n \to \infty$, wobei (3) benutzt wurde. Wir substituieren $2\pi x = \frac{m}{n} \cdot w$ und erhalten

$$r(n) = e^{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)m - (D(0)-1)\log\frac{m}{n} + D'(0) - \log 2\pi} \cdot I + e^m \cdot R_1 \tag{7}$$

mit

$$I = \int_{-c_{10}m^{\frac{1-\beta}{\alpha}}}^{+c_{10}m^{\frac{1-\beta}{\alpha}}} e^{\varphi_2(w)}\,dw$$

und

$$\varphi_2(w) = m\left\{\frac{1}{\alpha(1+iw)^\alpha} - \frac{1}{\alpha} + iw\right\} - D(0)\log(1+iw) + O\left(m^{-\frac{c_0}{\alpha}}\right)$$

für $m \to \infty$. Das Integral I berechnen wir asymptotisch in folgender Weise. Es ist

$$I = \int_{-c_{10}m^{\frac{1-\beta}{\alpha}}}^{+c_{10}m^{\frac{1-\beta}{\alpha}}} e^{\frac{-m(\alpha+1)}{2}w^2} + R_2 \tag{8}$$

mit

$$R_2 = \int_{-c_{10} m^{\frac{1-\beta}{\alpha}}}^{+c_{10} m^{\frac{1-\beta}{\alpha}}} e^{\frac{-m(\alpha+1)}{2} w^2} \cdot \{e^{\varphi_3(w)} - 1\}\, dw .$$

Dabei ist

$$\varphi_3(w) = m\left\{\frac{1}{\alpha(1+iw)^\alpha} - \frac{1}{\alpha} + iw + \frac{\alpha+1}{2} w^2\right\} - D(0)\log(1+iw) + O\left(m^{-\frac{c_0}{\alpha}}\right)$$

für $m \to \infty$. Für $n \geqq n_3 \geqq n_2$, n_3 hinreichend groß, ist im Integral R_2 sicher $|w| < 1$, wie man den Formeln (3) und (4) entnimmt. Deshalb gilt

$$m\left\{\frac{1}{\alpha(1+iw)^\alpha} - \frac{1}{\alpha} + iw + \frac{\alpha+1}{2} w^2\right\} = O(m \cdot |w|^3) = O\left(m^{\frac{\alpha+3(1-\beta)}{\alpha}}\right)$$

und

$$\log(1+iw) = O(|w|) = O\left(m^{\frac{1-\beta}{\alpha}}\right),$$

also

$$e^{\varphi_3(w)} - 1 = O\left(m^{\frac{\alpha+3(1-\beta)}{\alpha}} + m^{\frac{1-\beta}{\alpha}} + m^{-\frac{c_0}{\alpha}}\right) = O(m^{-\mu_1})$$

für $m \to \infty$ mit einem gewissen μ_1; nach (4) kann

$$\mu_1 = \mathrm{Min}\left(\frac{c_0}{\alpha}, \frac{1}{2} - \frac{3\delta}{4}\right)$$

gewählt werden. Da die Länge des Integrationsweges im Integral R_2 gleich $2c_{10} \cdot m^{\frac{1-\beta}{\alpha}}$ ist, erhalten wir

$$R_2 = O(m^{-\mu_2}) \tag{9}$$

für $m \to \infty$, wobei

$$\mu_2 = \mathrm{Min}\left(\frac{c_0}{\alpha} + \frac{1}{2} - \frac{\delta}{4}, 1 - \delta\right)$$

zu setzen ist. Für das Integral in (8) ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-c_{10} m^{\frac{1-\beta}{\alpha}}}^{+c_{10} m^{\frac{1-\beta}{\alpha}}} e^{\frac{-m(\alpha+1)}{2} w^2}\, dw = \sqrt{\frac{2}{m(\alpha+1)}} \cdot \int_{-c_{11} m^{\delta/4}}^{+c_{11} m^{\delta/4}} e^{-z^2}\, dz \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{m(\alpha+1)}} + O\left(m^{-\frac{1}{2}} e^{-c_{12} m^{\delta/4}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Aus (8), (9) und (10) folgt

$$I = \sqrt{\frac{2\pi}{m(\alpha+1)}} \cdot (1 + O(m^{-\mu_3})) \tag{11}$$

für $m \to \infty$ mit

$$\mu_3 = \mathrm{Min}\left(\frac{c_0}{\alpha} - \frac{\delta}{4}, \frac{1}{2} - \delta\right).$$

Die Formeln (5), (6), (7) und (11) ergeben

$$(12) \qquad r(n) = e^{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)m - (D(0)-1)\log\frac{m}{n} + D'(0)} \cdot \left(2\pi m(\alpha+1)\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + O\left(m^{-\mu_3}\right)\right)$$

für $m \to \infty$. Berücksichtigt man nun die Bedeutung von m gemäß (3), so liefert (12) die Behauptung von Satz 1.

Anwendungen.

1. Es seien k und a feste natürliche Zahlen, $1 \leqq a \leqq k$ und $(a, k) = 1$. Es bedeute $q(n; k, a)$ die Anzahl der Partitionen der Zahl n in natürliche Zahlen $n_i \equiv a \pmod{k}$. Für $\Re(\tau) > 0$ gilt

$$f(\tau) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - e^{-(kn+a)\tau})^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q(n; k, a)\, e^{-n\tau}.$$

Ferner ist für $\sigma > 1$ die DIRICHLETsche Reihe

$$D(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (kn + a)^{-s} = k^{-s}\zeta\left(s, \frac{a}{k}\right)$$

und

$$g(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(kn+a)\tau} = \frac{e^{-a\tau}}{1 - e^{-k\tau}}$$

für $\Re(\tau) > 0$. Man prüft leicht nach, daß alle Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt sind. Weiter ist bekanntlich (vgl. [2], S. 271)

$$(13) \qquad \zeta\left(0, \frac{a}{k}\right) = \frac{1}{2} - \frac{a}{k}; \qquad \zeta'\left(0, \frac{a}{k}\right) = \log\Gamma\left(\frac{a}{k}\right) - \frac{1}{2}\log 2\pi,$$

so daß insgesamt

$$\alpha = 1; \qquad A = \frac{1}{k}; \qquad D(0) = \frac{1}{2} - \frac{a}{k}$$

und

$$D'(0) = \log\Gamma\left(\frac{a}{k}\right) - \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(\frac{a}{k} - \frac{1}{2}\right)\log k$$

wird. Somit ergibt sich der

Satz 2. Für $n \to \infty$ gilt

$$q(n; k, a) \sim C \cdot n^{\varkappa} \cdot e^{\pi\cdot\sqrt{2n/3}k}$$

mit

$$C = \Gamma\left(\frac{a}{k}\right) \cdot \pi^{\frac{a}{k}-1} \cdot 2^{-\frac{3}{2}-\frac{a}{2k}} \cdot 3^{-\frac{a}{2k}} \cdot k^{-\frac{1}{2}+\frac{a}{2k}}$$

und

$$\varkappa = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{k}\right).$$

In der letzten Formel sind die beiden bekannten Beziehungen (vgl. [1], S. 1075)

$$q(n;1,1) = p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \cdot e^{\pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3}n}}$$

und

$$q(n;2,1) = q(n) \sim \frac{1}{4 \cdot n^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}} \cdot e^{\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{6}n}}$$

für $n \to \infty$ enthalten. Man erkennt ferner, daß für genügend großes n die Ungleichung

$$q(n;k,a_1) > q(n;k,a_2)$$

besteht, wenn a_1 und a_2 zwei natürliche Zahlen mit $1 \leq a_1 < a_2 \leq k$, $(a_1, k) = 1$ und $(a_2, k) = 1$ sind.

2. Es sei d die Diskriminante eines quadratischen Zahlkörpers. Für $\nu = 0$ oder $= 1$ bedeute $r_\nu(n;d)$ die Anzahl aller Partitionen der Zahl n in natürliche Zahlen n_i mit $\left(\frac{d}{n_i}\right) = (-1)^\nu$, wobei $\left(\frac{d}{n_i}\right)$ das KRONECKER-Symbol bezeichnet. Es gilt

$$f_\nu(\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-n\tau})^{-a_n^{(\nu)}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_\nu(n;d) \cdot e^{-n\tau}$$

für $\Re(\tau) > 0$. Dabei ist

$$a_n^{(\nu)} = \begin{cases} 1 & \text{für } \left(\frac{d}{n_i}\right) = (-1)^\nu, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

also zusammengefaßt

$$a_n^{(\nu)} = \frac{1}{2}\left\{\chi_0(n) + (-1)^\nu \left(\frac{d}{n}\right)\right\}.$$

Unter $\chi_0(n)$ verstehen wir dabei den Hauptcharakter modulo $|d|$. Es ist demnach

$$D_\nu(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(\nu)} \cdot n^{-s} = \frac{1}{2} L(s, \chi_0) + \frac{(-1)^\nu}{2} L_d(s) \tag{14}$$

in der üblichen Bezeichnungsweise der DIRICHLETschen L-Reihen. Man sieht wiederum leicht ein, daß die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt sind. Mit

$$\alpha = 1; \qquad A = \frac{\varphi(|d|)}{2|d|} \qquad (\varphi(k) = \text{EULERsche Funktion})$$

liefert daher der Satz 1 den

Satz 3. Für $n \to \infty$ gilt

$$r_\nu(n;d) \sim C_\nu \cdot n^{\varkappa_\nu} \cdot e^{\pi \cdot \sqrt{\frac{(|d|)\cdot n}{3|d|}}} \tag{15}$$

mit

$$C_\nu = e^{D_\nu'(0)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{\pi^2 \varphi(|d|)}{12 \cdot |d|}\right)^{\frac{1-2D_\nu(0)}{4}}$$

und

$$\varkappa_\nu = \frac{2D_\nu(0) - 3}{4}.$$

Es sei nun p eine ungerade Primzahl. Dann ist für $n > 0$ und $(n, p) = 1$ (vgl. [3], Satz 98)

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} \left(\frac{p}{n}\right) & \text{für } p \equiv 1 \pmod 4, \\ \left(\frac{-p}{n}\right) & \text{für } p \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Deshalb stellt die Funktion $r_\nu(n; \pm p)$ die Anzahl aller Partitionen von n in solche natürlichen Zahlen n_i mit $(n_i, p) = 1$ dar, welche quadratische Reste ($\nu = 0$) bzw. Nichtreste ($\nu = 1$) modulo p sind. Dabei steht in $r_\nu(n; \pm p)$ das positive Vorzeichen für $p \equiv 1 \pmod 4$, das negative Vorzeichen für $p \equiv 3 \pmod 4$.

Wir untersuchen noch den Quotienten von $r_0(n; d)$ und $r_1(n; d)$. Aus (14) und (15) ergibt sich

$$\frac{r_0(n; d)}{r_1(n; d)} \sim e^{L_d'(0)} \cdot \left(\frac{12 \cdot |d| \cdot n}{\pi^2 \cdot \varphi(|d|)}\right)^{\frac{1}{2} L_d(0)} \tag{16}$$

für $n \to \infty$. Nun gilt

$$L_d(s) = |d|^{-s} \cdot \sum_{m=1}^{|d|-1} \left(\frac{d}{m}\right) \zeta\left(s, \frac{m}{|d|}\right).$$

Nach (13) ist also

$$L_d(0) = \frac{-1}{|d|} \cdot \sum_{m=1}^{|d|-1} \left(\frac{d}{m}\right) \cdot m$$

und

$$L_d'(0) = \frac{\log |d|}{|d|} \cdot \sum_{m=1}^{|d|-1} \left(\frac{d}{m}\right) \cdot m + \sum_{m=1}^{|d|-1} \left(\frac{d}{m}\right) \log \Gamma\left(\frac{m}{|d|}\right).$$

Bekanntlich ist

$$\frac{-1}{|d|} \cdot \sum_{m=1}^{|d|-1} \left(\frac{d}{m}\right) \cdot m = \begin{cases} 0 & \text{für } d > 0, \\ \frac{2h}{w} & \text{für } d < 0, \end{cases}$$

wobei w die Anzahl der Einheitswurzeln des imaginär-quadratischen Zahlkörpers $R(\sqrt{d})$ und h dessen Klassenzahl ist. Ferner ist für $d > 0$ offenbar

$$\sum_{m=1}^{d-1} \left(\frac{d}{m}\right) \log \Gamma\left(\frac{m}{d}\right) = -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{d-1} \left(\frac{d}{m}\right) \log \sin \frac{\pi m}{d} = h \cdot \log \varepsilon,$$

wobei ε die Grundeinheit > 1 des reell-quadratischen Zahlkörpers $R(\sqrt{d})$ und h dessen Klassenzahl bedeutet. Wir erhalten zunächst den

Satz 4[1]). Für $d>0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_0(n;d)}{r_1(n;d)}=\varepsilon^h.$$

Für negative Diskriminanten behaupten wir die Gültigkeit von

Satz 5. Für $d<0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{h}{w}}\cdot\frac{r_0(n;d)}{r_1(n;d)}=\left(\frac{12}{\pi^2\cdot|d|\varphi(|d|)}\right)^{h/w}\cdot\prod_{m=1}^{|d|-1}\left(\Gamma\left(\frac{m}{|d|}\right)\right)^{\left(\frac{d}{m}\right)}$$

oder

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{h}{w}}\cdot\frac{r_0(n;d)}{r_1(n;d)}=\left(\frac{48\cdot|d|}{\varphi(|d|)}\right)^{h/w}\cdot\prod_{\mathfrak{R}}\left(\frac{\eta^2\left(\frac{\overline{\beta}_2}{\overline{\beta}_1}\right)\eta^2\left(-\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)N\mathfrak{b}}{N\beta_1}\right)^{2/w}.$$

Im zweiten Ausdruck durchläuft $\mathfrak{R}$ die Idealklassen des Körpers $R(\sqrt{d})$, $\mathfrak{b}$ ist ein beliebiges Ideal der Klasse $\mathfrak{R}$ und β_1, β_2 bilden irgendeine Modulbasis von $\mathfrak{b}$, wobei $\overline{\beta}_2/\overline{\beta}_1$ einen positiven Imaginärteil haben möge. Ferner ist für $\Im(\tau)>0$

$$\eta(\tau)=e^{\frac{\pi i\tau}{12}}\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i\nu\tau}).$$

Während der erste Ausdruck für den Grenzwert in Satz 5 bereits bewiesen ist, soll für den zweiten Ausdruck der Beweis kurz angedeutet werden. Es handelt sich um eine zweite Berechnung des Wertes von $L_d'(0)$ mit Hilfe der Kroneckerschen Grenzformel [4]. Ist $Z(s)$ die Dedekindsche Zetafunktion des Körpers $R(\sqrt{d})$, so gilt bekanntlich

$$Z(s)=L_d(s)\cdot\zeta(s).$$

Hieraus und aus der Funktionalgleichung der Dirichletschen L-Reihen erhält man nach kurzer Rechnung

$$L_d'(0)=\frac{2h}{w}\cdot\left(-2\Gamma'(1)+\log\frac{2\pi}{|d|}\right)-\frac{\sqrt{|d|}}{\pi}\cdot A_0.$$

Dabei ist A_0 das konstante Glied der Laurentschen Entwicklung von $Z(s)$ um den Punkt $s=1$. Die Bestimmung von A_0 erfolgt nun, indem man $Z(s)$ nach den Zetafunktionen für die einzelnen Idealklassen aufspaltet und auf jede dieser Funktionen die Kroneckersche Grenzformel anwendet. Man erhält

$$A_0=-\frac{2\pi h\log|d|}{w\cdot\sqrt{|d|}}-\frac{4\pi h\Gamma'(1)}{w\cdot\sqrt{|d|}}-\frac{2\pi}{w\sqrt{|d|}}\cdot\sum_{\mathfrak{R}}\log\left(\frac{\eta^2\left(\frac{\overline{\beta}_2}{\overline{\beta}_1}\right)\eta^2\left(-\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)N\mathfrak{b}}{N\beta_1}\right).$$

[1]) Dieser Satz wurde zuerst von H. Petersson auf einer Tagung in Oberwolfach (14. 4. 53 bis 19. 4. 53) für den Fall $d=p=$ Primzahl mit $p\equiv 1 \pmod 4$ ausgesprochen. Wie mir Prof. Petersson kürzlich mitteilte, war ihm auch die allgemeine Aussage für beliebige positive Diskriminanten bekannt. Die Beweismethode von Prof. Petersson ist von der hier benutzten Methode verschieden.

Also wird

$$L_d'(0) = -\frac{2h}{w}\log 2\pi + \frac{2}{w}\cdot\sum_{\mathfrak{R}}\log\left(\eta^2\left(\frac{\overline{\beta_2}}{\overline{\beta_1}}\right)\eta^2\left(-\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)N\mathfrak{b}\right),$$

woraus sich mit (16) die zweite Form der Limesbeziehung in Satz 5 ergibt.

Literatur.

[1] INGHAM, A. E.: A Tauberian Theorem for Partitions. Ann. of Math. **42**, 1075—1090 (1941). — [2] WHITTAKER, E. T., and G. N. WATSON: A Course of modern Analysis, 4. Aufl. Cambridge 1952. — [3] LANDAU, E.: Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. 1. Leipzig 1927. — [4] WEBER, H.: Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen, S. 455 bis 462. Braunschweig 1891.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 26. September 1953.)

Koecher, M.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 399—416 (1954)

Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades. I.

Von
Max Koecher.

§ 1. Einleitung.

Die von C. L. Siegel [2] im Jahre 1939 als Verallgemeinerung der klassischen Modulformen eingeführten *Modulformen n-ten Grades* sind seither verschiedentlich untersucht worden. Abgesehen von den zahlentheoretischen Anwendungen, die bekanntlich den Anstoß zu dieser Theorie gaben, sind die Modulformen n-ten Grades — als eine Klasse von Funktionen von $\frac{n}{2}(n+1)$ komplexen Variablen mit speziellen Invarianzeigenschaften bei einer Substitutionsgruppe — vom Standpunkt der allgemeinen Funktionentheorie von Interesse. In allen bisher untersuchten Fällen zeigte sich eine vollständige Analogie zum klassischen Fall einer komplexen Variablen.

Unbefriedigend war allerdings, daß man eine — in gewissem Sinne abgeschlossene — Theorie nur für die *ganzen* Modulformen n-ten Grades, d.h. für diejenigen Modulformen, die im Definitionsgebiet regulär analytisch sind und bei Unendlich gewissen starken Regularitätsforderungen genügen, durchführen konnte; unbefriedigend deshalb, weil ja im klassischen Falle eine möglichst schwache Forderung bei Unendlich erst die wichtigsten Fälle — man denke an die „absolute Invariante" $j(\tau)$ der Modulgruppe — einschließt. Durch diese Überlegungen war eigentlich der Weg zur Ausdehnung der Theorie auf „nicht-ganze" Modulformen vorgezeichnet: Man hatte zu prüfen, welche Aussagen noch beweisbar sind, wenn man zunächst bei Unendlich keine Forderung stellt, d.h. dort (und nur dort) eine beliebige Singularität für die zu betrachtenden Funktionen zuläßt, um dann durch Einschränkung der Singularität (z.B. auf Pole) zu einer Übertragung der klassischen Theorie zu kommen. Ein Blick auf den klassischen Fall, in dem man bei Unendlich ja stets eine Forderung stellen muß (die Funktion darf höchstens einen Pol in der Ortsuniformisierenden haben), ließ Aussagen im ersten Falle (beliebige Singularität bei Unendlich) aussichtslos erscheinen. Erstaunlicherweise zeigte eine nähere Untersuchung für $n > 1$, daß eine Einschränkung der Singularität bei Unendlich durch eine Beschränktheitsforderung, wie sie Siegel [2] stellt, überflüssig ist. Das soll heißen: Die durch die beiden Forderungen

1. Regularität der Funktionen im Innern des Definitionsgebietes H_n,
2. Invarianz der Funktionen (bis auf einen multiplikativen elementaren Faktor) bei einer diskontinuierlichen Substitutionsgruppe K der analytischen Automorphismen von H_n

definierte lineare Funktionenschar stimmt mit der Schar der gewöhnlichen Modulformen n-ten Grades überein, sobald K die Modulgruppe n-ten Grades ist und $n > 1$ angenommen wird. Es wird ausdrücklich betont, daß diese

Aussage bei $n=1$ natürlich falsch ist. Ferner führt selbst eine gewisse Abschwächung von 1. nicht über die Modulformen n-ten Grades im bisherigen Sinne hinaus. Da die komplexe Dimension von Unendlich gleich $\frac{n}{2}(n+1)-1$ ist, kann dieser Satz selbst dann nicht aus allgemeinen Sätzen der Funktionentheorie von mehreren Variablen gefolgert werden, wenn man den durch Randsubstitutionen geschlossenen Fundamentalbereich von K als kompakte analytische Mannigfaltigkeit ansehen dürfte.

Der Beweis dieser Behauptung wird in der vorliegenden Arbeit gleich für eine allgemeine Klasse von diskontinuierlichen Untergruppen K der Automorphismengruppe von H_n geführt, da durch diese erwünschte Verallgemeinerung keine neuen Schwierigkeiten auftreten und die Beweisführung an Klarheit gewinnt. Die Verallgemeinerung der zugelassenen Substitutionsgruppen hat aber nicht nur formale Bedeutung, denn es werden dadurch alle in der Theorie der allgemeinen abelschen Funktionen von n Variablen auftretenden Gruppen erfaßt, die innerhalb der Theorie der abelschen Funktionen den gleichen Platz einnehmen, den die gewöhnliche Modulgruppe innerhalb der Theorie der elliptischen Funktionen inne hat. Diese Gruppen sind andererseits für eine Ausdehnung der HECKEschen Operatorentheorie über den bekannten MAASSschen Ansatz hinaus von wesentlicher Bedeutung. Da der Fundamentalbereich dieser Substitutionsgruppen relativ zu H_n nicht kompakt ist — der kompakte Fall ist durch SIEGEL [3] ja seit langem vollständig geklärt —, kommt man einen Schritt weiter in Richtung auf eine Theorie der allgemeinen automorphen Formen in H_n.

Zum Schluß wird der Körper $P\{K\}$ derjenigen bei K vollinvarianten meromorphen Funktionen untersucht, die sich als Quotienten zweier Formen der durch 1. und 2. definierten Schar darstellen lassen. Ist K_0 eine geeignete Untergruppe von endlichem Index in K und $P\{K_0\}$ der zugehörige Funktionenkörper, so wird insbesondere bewiesen werden, daß $P\{K_0\}$ eine einfache algebraische Erweiterung von $P\{K\}$ ist.

In § 2 wird zuerst eine ausführliche Übersicht über die Bezeichnungen und Ergebnisse gegeben, während die §§ 3 und 4 nur Beweise enthalten. Diese Trennung in Textteil und Beweise erschien aus Gründen der Übersichtlichkeit zweckmäßig. Den Hinweis auf die Notwendigkeit einer Untersuchung der „nicht-ganzen" Modulformen n-ten Grades und ihre eventuelle Konstruktion durch geeignete POINCARÉsche Reihen sowie wertvolle Ratschläge verdanke ich Herrn Prof. Dr. H. PETERSSON. Durch die vorliegende Arbeit wird gleichzeitig klargestellt, daß die analog zu einem MAASSschen Ansatz [1] formal gebildeten POINCARÉschen Reihen mit nicht halbpositiver Exponentenmatrix nicht konvergieren können.

§ 2. Bezeichnungen und Ergebnisse.

1. Mit Ausnahme der Nullmatrix werden Matrizen stets mit deutschen Buchstaben[1]) bezeichnet, wobei obere Indizes wie üblich Zeilen- und Spalten-

[1]) Kleine deutsche Buchstaben sind für Spalten (Vektoren) vorbehalten.

anzahl angeben. Für Nullmatrizen steht immer 0, Zeilen- und Spaltenanzahl ergibt sich dabei aus dem Zusammenhang. Ist $\mathfrak{A}^{(m)}$ eine quadratische Matrix, so wird mit $|\mathfrak{A}|$ ihre Determinante, mit $||\mathfrak{A}||$ deren absoluter Betrag und mit $\sigma(\mathfrak{A})$ die Spur von $\mathfrak{A}$ bezeichnet. $r(\mathfrak{A})$ bedeutet den Rang von $\mathfrak{A}$. Zur Abkürzung sei weiter $\mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix,

$$\mathfrak{S}[\mathfrak{A}] = \mathfrak{A}' \mathfrak{S} \mathfrak{A} \quad \text{und} \quad [d_1, d_2, \ldots, d_n]$$

eine Diagonalmatrix mit $d_1, d_2, \ldots, d_n$ als Diagonalelementen. Die Schreibweise

$$(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}), \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 & * \\ \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_3 \end{pmatrix}$$

gibt die Zerlegung einer Matrix in „Kästchen". Eine Verwechselung von $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ mit dem Produkt von $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}$ ist wohl nicht zu befürchten. Bei $\mathfrak{A} = (a_{kl})$ wird stets $a_{kk} = a_k$ abgekürzt.

Sind Γ_m und Γ_n zwei multiplikative Gruppen von m- (bzw. n-) reihigen Matrizen, so heißen zwei Matrizen $\mathfrak{A}^{(m,n)}$ und $\mathfrak{B}^{(m,n)}$ *linksassoziiert* nach Γ_m (bzw. *rechtsassoziiert* nach Γ_n), wenn

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{U}\mathfrak{B}, \qquad \mathfrak{U} \text{ aus } \Gamma_m \text{ (bzw. } \mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathfrak{V},\ \mathfrak{V} \text{ aus } \Gamma_n)$$

erfüllt ist. Durch die Angabe

$$\mathfrak{X}\, l\, \Gamma_m \quad (\text{bzw. } \mathfrak{X}\, r\, \Gamma_n)$$

unter einem Summenzeichen soll vermerkt werden, daß die Summe nur über ein volles System von nach Γ_m nicht linksassoziierten (bzw. nach Γ_n nicht rechtsassoziierten) Matrizen $\mathfrak{X}^{(m,n)}$ erstreckt werden soll. Selbstverständliche Voraussetzung dabei ist, daß die einzelnen Glieder der Summe nicht von der speziellen Auswahl der Vertreter abhängen. Zwei symmetrische Matrizen $\mathfrak{S}^{(n)}$ und $\mathfrak{T}^{(n)}$ heißen außerdem *äquivalent* nach Γ_n, wenn $\mathfrak{S} = \mathfrak{T}[\mathfrak{U}]$ mit einem $\mathfrak{U}$ aus Γ_n gilt. Mit

$$\mathfrak{S} \bmod \Gamma_n$$

wird dann ein volles System von Matrizen bezeichnet, die nach Γ_n nicht äquivalent sind.

Eine Matrix wird *rational* (bzw. *ganz*, *reell* oder *komplex*) genannt, wenn alle ihre Elemente rationale (bzw. ganz rationale, reelle oder komplexe) Zahlen sind; eine symmetrische Matrix $\mathfrak{S} = (s_{kl})$ heißt ferner *halbganz*, wenn die s_k und $2s_{kl}$ ganz rational sind. Sind $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^{-1}$ ganz, dann heißt $\mathfrak{U}$ *unimodular*; $\mathfrak{P}^{(n,p)}$ heißt *primitiv*, wenn $\mathfrak{P}$ zu einer unimodularen Matrix ergänzt werden kann, d.h. wenn es bei $n > p$ (bzw. $n < p$) eine Matrix $\mathfrak{P}^{(n,n-p)}$ (bzw. $\mathfrak{Q}^{(p-n,p)}$) derart gibt, daß

$$(\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}) \quad \left(\text{bzw. } \begin{pmatrix} \mathfrak{P} \\ \mathfrak{Q} \end{pmatrix}\right)$$

unimodular ist. Die n-reihigen unimodularen Matrizen bilden bei Multiplikation eine Gruppe Ω_n. Diejenigen Matrizen aus Ω_n, für die

$$\mathfrak{U} \equiv \pm \mathfrak{E} \pmod{q}$$

mit natürlichem q gilt, werden zur Gruppe $\Omega_n[q]$ zusammengefaßt. Bei

$$\omega_n(q) = [\Omega_n : \Omega_n[q]]$$

wird in Hilfssatz 1

$$\omega_n(q) = q^{n^2-1} \prod_{\substack{p|q \\ 2 \le k \le n}} (1 - p^{-k})$$

bewiesen werden. p hat dabei alle verschiedenen Primteiler von q zu durchlaufen.

Für rationales symmetrisches $\mathfrak{S}^{(n)}$ wird ferner die Gruppe der Einheiten $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{S}$ mit $\Gamma(\mathfrak{S})$ bezeichnet. $\mathfrak{U}$ heißt dabei eine *Einheit* von $\mathfrak{S}$, wenn $\mathfrak{U}$ ganz ist und der Gleichung $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}[\mathfrak{U}]$ genügt. Schließlich wird noch

$$\Gamma_q(\mathfrak{S}) = \Omega_n[q] \cap \Gamma(\mathfrak{S})$$

gesetzt.

Ist $\mathfrak{S}^{(n)}$ symmetrisch und reell, dann gibt es ein reelles $\mathfrak{X}^{(n)}$ mit

$$\mathfrak{S}[\mathfrak{X}] = \begin{pmatrix} \mathfrak{E}^{(\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathfrak{E}^{(\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r(\mathfrak{S}) = \nu + \mu,$$

und man nennt $s(\mathfrak{S}) = (\nu, \mu)$ die *Signatur* von $\mathfrak{S}$. Bei $\mu = 0$, $\nu \geqq 0$ soll $\mathfrak{S}$ *halbpositiv* ($\mathfrak{S} \geqq 0$), bei $\nu = n$ soll $\mathfrak{S}$ *positiv* ($\mathfrak{S} > 0$) und bei $\nu\mu > 0$ soll $\mathfrak{S}$ *indefinit* heißen. Für $\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_2 > 0$ wird $\mathfrak{S}_1 > \mathfrak{S}_2$ abgekürzt.

Bei der Abbildung $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}[\mathfrak{U}]$, $\mathfrak{U}$ aus Ω_n, geht die Menge aller reellen symmetrischen positiven Matrizen in sich über, und es existiert ein offener Fundamentalbereich aller positiven Matrizen bei der Gruppe dieser Abbildungen. Als Fundamentalbereich kann dabei die Menge R_n aller nach MINKOWSKI *reduzierten* symmetrischen positiven Matrizen gewählt werden. Der Reduktionstheorie der quadratischen Formen entnimmt man die folgenden wichtigen Ungleichungen: Liegt $\mathfrak{S} = (s_{kl})$ in R_n, dann gilt

$$(2.1) \qquad \begin{cases} s_1 \leqq s_2 \leqq \cdots \leqq s_n, & -s_k \leqq 2s_{kl} \leqq s_k, \\ c_1 \leqq \dfrac{|\mathfrak{S}|}{s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_n} \leqq c_2, \\ \mathfrak{S} > c_3[s_1, s_2, \ldots, s_n], \end{cases}$$

wobei die positiven Konstanten c_1, c_2 und c_3 nur von n abhängen.

2. Unter der *symplektischen Gruppe n-ten Grades* Σ_n wird nach SIEGEL [4] die multiplikative Gruppe aller $2n$-reihigen reellen Matrizen $\mathfrak{M}$ verstanden, die der Bedingung

$$\mathfrak{J}[\mathfrak{M}] = \mathfrak{J}, \qquad \mathfrak{J}^{(2n)} = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{E}^{(n)} \\ -\mathfrak{E} & 0 \end{pmatrix}$$

genügen. In Verallgemeinerung der oberen Halbebene betrachtet man die offene Menge H_n aller komplexen symmetrischen Matrizen $\mathfrak{Z}^{(n)} = (z_{kl}) = \mathfrak{X} + i\mathfrak{Y}$, für die $\mathfrak{Y} > 0$ erfüllt ist. Setzt man dann für alle $\mathfrak{Z}$ aus H_n

$$\mathfrak{M}\langle\mathfrak{Z}\rangle = (\mathfrak{A}\mathfrak{Z} + \mathfrak{B})(\mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D})^{-1}, \qquad \mathfrak{M}^{(2n)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^{(n)} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix},$$
$$\mathfrak{M}\{\mathfrak{Z}\} = \mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D},$$

dann gelten die Rechenregeln

$$(2.2)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_1\langle\mathfrak{M}_2\langle\mathfrak{Z}\rangle\rangle = (\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)\langle\mathfrak{Z}\rangle, \\ \mathfrak{M}_1\{\mathfrak{M}_2\langle\mathfrak{Z}\rangle\} = (\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)\{\mathfrak{Z}\}\cdot(\mathfrak{M}_2\{\mathfrak{Z}\})^{-1}, \\ \operatorname{Im}\mathfrak{M}\langle\mathfrak{Z}\rangle = (\mathfrak{M}\{\mathfrak{Z}\})'^{-1}\cdot\operatorname{Im}\mathfrak{Z}\cdot(\overline{\mathfrak{M}\{\mathfrak{Z}\}})^{-1}. \end{cases}$$

Durch

$$\mathfrak{Z}\to\mathfrak{M}\langle\mathfrak{Z}\rangle,\quad \mathfrak{M}\text{ aus }\Sigma_n,$$

wird H_n auf sich abgebildet, und die gleiche Abbildung liefern nur $\mathfrak{M}$ und $-\mathfrak{M}$. Als wichtigste Untergruppe von Σ_n ist die *Modulgruppe n-ten Grades* M_n anzusehen, d.h. die Gruppe aller ganzen symplektischen Matrizen, und in Analogie zum klassischen Fall $n=1$ wird durch

$$M_n[q] = M_n\cap\Omega_{2n}[q]$$

die *Hauptkongruenzgruppe* der Stufe q definiert. Eine beliebige Untergruppe von Σ_n heißt dann *Kongruenzgruppe* der Stufe q, wenn in ihr mit endlichem Index die Hauptkongruenzgruppe der Stufe q enthalten ist. Die Modulgruppe n-ten Grades ist dann Kongruenzgruppe zu jeder Stufe, und in Hilfssatz 1 wird

$$\mu_n(q) = [M_n : M_n[q]] = \varepsilon(q)\cdot q^{n(2n+1)}\cdot\prod_{\substack{p/q\\ 1\le k\le n}}(1-p^{-2k})$$

mit

$$\varepsilon(q) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } q=2 \\ \frac{1}{2}, & \text{wenn } q>2 \end{cases}$$

bewiesen werden.

3. Ist $f(\mathfrak{Z})$ eine eindeutige Funktion für alle $\mathfrak{Z}$ aus H_n, so setzt man zur Abkürzung für ganzes k in Verallgemeinerung einer Bezeichnung von Petersson

$$\underset{(k)}{f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{M}} = f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{M} = |\mathfrak{M}\{\mathfrak{Z}\}|^k\cdot f(\mathfrak{M}\langle\mathfrak{Z}\rangle)$$

und faßt $\mathfrak{M}$ als Operator auf. Man rechnet wegen (2.2) leicht

$$(f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{M}_1)/\mathfrak{M}_2 = f(\mathfrak{Z})/(\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{M}_2)$$

nach.

Die weiteren Ergebnisse dieser Arbeit sind Aussagen über Formen zu Kongruenzuntergruppen K von Σ_n. An dieser Stelle werden daher Bezeichnung und allgemeine Voraussetzung zusammenfassend formuliert:

(V) Es sei k ganz und $n>1$, K eine Kongruenzgruppe in Σ_n, d.h.

$$M_n[q]\subseteqq K\subseteqq\Sigma_n$$

mit endlichem Index $[K:M_n[q]]$. $v=v(\mathfrak{M})$ sei ferner ein Multiplikatorsystem von K vom Betrage eins mit der zusätzlichen Forderung

$$v(\mathfrak{M}) = 1\quad\text{für alle }\mathfrak{M}\text{ aus }M_n[q].$$

Unter dieser Voraussetzung (V) versteht man dann unter einer *Form* aus der linearen Schar $\{K, k, v\}$ eine Funktion $f(\mathfrak{Z})$ mit folgenden Eigenschaften:

(A) $\left\{ \begin{array}{l} f(\mathfrak{Z}) \text{ ist in } H_n \text{ eine reguläre analytische Funktion der } \frac{n}{2}(n+1) \text{ un-} \\ \text{abhängigen Variablen } z_{kl} = z_{lk}. \end{array} \right.$

(B) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Für jedes } \mathfrak{M} \text{ aus } K \text{ gilt} \\ \qquad f(\mathfrak{Z})|_{(k)}\mathfrak{M} = v(\mathfrak{M})\, f(\mathfrak{Z}), \\ \text{wobei } v(\mathfrak{M}) \text{ der zu } \mathfrak{M} \text{ gehörige Multiplikator ist.} \end{array} \right.$

Der Unterschied zum bekannten SIEGELschen Ansatz besteht darin, daß *erstens* eine größere Klasse von Untergruppen der symplektischen Gruppe betrachtet wird, *zweitens* — und das ist sehr wesentlich — keine Forderung über das Verhalten der Funktionen bei Annäherung an Unendlich gestellt wird.

Gilt für ein $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k, v\}$ noch:

(C) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Für jedes } c > 0 \text{ ist } f(\mathfrak{Z})|_{(k)}\mathfrak{R} \text{ beschränkt für alle rationalen } \mathfrak{R} \text{ aus } \Sigma_n \text{ und} \\ \text{alle } \mathfrak{Z} \text{ aus } H_n \text{ mit } \operatorname{Im}\mathfrak{Z} > c\mathfrak{E}, \end{array} \right.$

dann wird $f(\mathfrak{Z})$ eine *ganze Form* aus $\{K, k, v\}$ genannt. Ist $K = M_n$ die Modulgruppe n-ten Grades, dann stellt der folgende Satz die Verbindung zu den bekannten Modulformen n-ten Grades her.

Satz 1. *Für ganzes k stimmt die lineare Schar der ganzen Formen aus $\{M_n, k, 1\}$ mit der Schar der Modulformen n-ten Grades überein.*

4. Bezeichnet man bei rationaler Matrix $\mathfrak{A}$, $|\mathfrak{A}| \neq 0$, mit $g(\mathfrak{A})$ die kleinste natürliche Zahl g, für die $g\mathfrak{A}$ und $g\mathfrak{A}^{-1}$ ganz sind, dann kann die wesentliche Aussage der vorliegenden Arbeit in der folgenden Form als Satz formuliert werden:

Satz 2. *Unter der Voraussetzung* (V) *gilt*:

a) *Für jedes $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k, v\}$ und jedes rationale $\mathfrak{R}$ aus Σ_n existiert eine Fourierentwicklung der Form*

$$f(\mathfrak{Z})|_{(k)}\mathfrak{R} = \sum_{\mathfrak{T} \geq 0} a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R})\, e^{\frac{2\pi i}{Q}\sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{Z})}, \qquad Q = q \cdot g^2(\mathfrak{R}),$$

wobei die Summe über alle symmetrischen halbpositiven halbganzen Matrizen $\mathfrak{T}^{(n)}$ zu erstrecken ist. Für die Koeffizienten hat man

$$a(\mathfrak{T}[\mathfrak{U}], \mathfrak{R}) = a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R}), \qquad \mathfrak{U} \text{ aus } \Omega_n[Q],$$
$$a(\mathfrak{T}, \mathfrak{M}\mathfrak{R}) = v(\mathfrak{M})\, a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R}), \qquad \mathfrak{M} \text{ aus } K.$$

b) *$\{K, k, v\}$ besteht nur aus ganzen Formen.*

Teil b dieses Satzes besagt, daß aus den Bedingungen (A) und (B) für $n > 1$ schon (C) folgt, d.h. zum Beispiel, daß in der grundlegenden Arbeit von SIEGEL [2] die (C) analoge Bedingung überflüssig ist. Für $n = 1$ ist der Satz natürlich falsch. Ersetzt man (A) durch die Forderung, daß $f(\mathfrak{Z})$ in H_n meromorph und nicht ganz ist, dann zeigt der Beweis von Satz 2, daß es

keinen „Horizontalstreifen“ $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} + i\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{X}$ beliebig reell, $\mathfrak{Y}$ aus einem abgeschlossenen Bereich G (in dem $\mathfrak{Y}$ durchweg positiv ist) geben kann, in dem $f(\mathfrak{Z})$ regulär analytisch ist. Da es nach Satz 2b nur ganze Formen gibt, kann die Unterscheidung zwischen Formen und ganzen Formen wieder fortgelassen werden.

Satz 3. *Unter der Voraussetzung* (V) *gilt:*

a) *Für $k > 0$ sind alle Formen aus $\{K, k, v\}$ identisch Null.*

b) *Für $k = 0$ sind alle Formen aus $\{K, 0, v\}$ identisch konstant.*

c) *Für $k < 0$ sei $\sigma_n = 2n\,(|\,\mathfrak{Z}\,c_3)^{-1}$. Sind dann alle Koeffizienten $a(\mathfrak{T}, \mathfrak{E})$ nach Satz 2a eines $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k, v\}$ Null für*

$$\sigma(\mathfrak{T}) \leq \frac{-k}{2\pi}\,\mu_n(q)\,\sigma_n,$$

dann ist $f(\mathfrak{Z})$ identisch Null.

Aus Satz 3a folgt sofort, daß es für $n > 1$ kein Analogon zur Diskriminante $\Delta(z)$, d.h. keine Funktion $f(\mathfrak{Z})$, die (B) genügt und deren Inverses in H_n regulär analytisch ist, gibt. Aus Satz 3b folgt entsprechend: Es gibt für $n > 1$ kein Analogon zur „Modulfunktion“ $j(z)$, d.h. keine nicht konstante Funktion $f(\mathfrak{Z})$, die bei den Substitutionen aus einer Gruppe K vollinvariant und im Innern von H_n regulär analytisch ist. Zum Beweis von Satz 3 benötigt man an mehreren Stellen wesentlich den Satz 2. Dadurch gelingt es, die Behauptungen a) bis c) auf die entsprechenden richtigen Aussagen über die Siegelschen Modulformen n-ten Grades zurückzuführen, so daß nicht einmal eine Übertragung dieser Beweise nötig ist.

Satz 4. *Unter der Voraussetzung* (V) *im Falle $k < 0$ ist der Rang der linearen Schar $\{K, k, v\}$ höchstens gleich*

$$\frac{\omega_n(q)}{n!}\,(-k \cdot \mu_n(q) \cdot \sigma_n)^h, \qquad h = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ist $f_j(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k_j, 1\}$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$, dann wird mit

$$\sum_{j=1}^{s} \alpha_j k_j, \qquad \alpha_j \geq 0,$$

das *Gewicht* des Potenzproduktes

$$\prod_{j=1}^{s} (f_j(\mathfrak{Z}))^{\alpha_j}$$

bezeichnet. Ein Polynom in den $f_j(\mathfrak{Z})$ wird wie üblich *isobar* genannt, wenn alle seine Potenzprodukte das gleiche Gewicht haben.

Satz 5. *Unter der Voraussetzung* (V) *besteht zwischen je $h+2$ beliebigen Formen $f_j(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k_j, 1\}$ $(k_j < 0)$ eine isobare algebraische Gleichung vom Gewicht*

$$-c_4 \cdot |k_1 \cdot k_2 \cdot \cdots \cdot k_{h+2}| \cdot \omega_n(q) \cdot (\mu_n(q))^h, \qquad h = \frac{n(n+1)}{2},$$

wobei die Konstante c_4 nur von n abhängt.

5. Betrachtet man nun in Verallgemeinerung der *Modulfunktionen n-ten Grades* [2] die Funktionen $f(\mathfrak{Z})$, die Quotient zweier Formen aus $\{K, k, v\}$ mit geeignetem ganzen $k<0$ sind, dann bilden diese Funktionen einen Körper $P\{K\}$. Satz 5 besagt, daß für den Transzendenzgrad $h(K)$ von $P\{K\}$ über dem Körper P der komplexen Zahlen

$$h(K) \leq h = \frac{n(n+1)}{2}$$

gilt. Nach SIEGEL [2] ist $h(M_n) = h$ und wegen

$$P\{K_1\} \supseteq P\{K_2\} \quad \text{für} \quad K_1 \subseteq K_2$$

folgt $h(K_1) \geq h(K_2)$, so daß für jede zugelassene Gruppe K der Transzendenzgrad

$$h(K) = h = \frac{n(n+1)}{2}$$

von $P\{K\}$ über P nicht von K abhängt. Damit hat man als Ergänzung zu Satz 5, daß es h Funktionen aus $P\{K\}$ gibt, die algebraisch unabhängig sind.

Sind K_1 und K_2 mit $K_1 \subseteq K_2$ zwei Gruppen, die eine gemeinsame Hauptkongruenzuntergruppe enthalten, dann gibt der folgende Satz über die algebraische Struktur von $P\{K_1\}$ über $P\{K_2\}$ Auskunft.

Satz 6. *$P\{K_1\}$ ist eine einfache algebraische Erweiterung m-ten Grades von $P\{K_2\}$ mit $m \leq [K_2 : K_1]$.*

Mit den hier zur Verfügung stehenden Mitteln scheint es jedoch nicht möglich zu sein, den genauen Körpergrad anzugeben.

§ 3. Beweis der Sätze 1 bis 6.

In den Beweisen wird zur Abkürzung

$$e_q(\mathfrak{W}) = e^{\frac{2\pi i}{q}\sigma(\mathfrak{W})}$$

für jedes natürliche q gesetzt. Die Beweise der benötigten Hilfssätze findet man in § 4.

1. *Beweis von Satz 1.* Für alle $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} + i\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y} = (y_{kl})$, aus dem von SIEGEL [2], § 2, angegebenen Fundamentalbereich $F(M_n)$ von H_n ist

$$\mathfrak{Y} \text{ reduziert und } y_1 \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Wegen (2.1) folgt für $\mathfrak{Z}$ aus $F(M_n)$

$$\mathfrak{Y} > c_5 \mathfrak{E}, \qquad c_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} c_3,$$

und daher ist jede ganze Form aus $\{M_n, k, 1\}$ eine SIEGELsche Modulform. Ist umgekehrt $f(\mathfrak{Z})$ eine SIEGELsche Modulform, dann gibt es zu beliebigem rationalen $\mathfrak{R}$ aus Σ_n ein $\mathfrak{M}$ aus M_n mit

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{M}\,\mathfrak{H}, \qquad \mathfrak{H} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}' & \mathfrak{S}\,\mathfrak{A}^{-1} \\ 0 & \mathfrak{A}^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}',$$

und für den Nachweis von (C) muß nur bewiesen werden, daß $f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{H}$ für alle $\mathfrak{Z}$ aus H_n mit $\operatorname{Im}\mathfrak{Z} > c\,\mathfrak{E}$ beschränkt ist. Aus der Existenz der Fourierreihe für $f(\mathfrak{Z})$,

$$f(\mathfrak{Z}) = \sum_{\mathfrak{T} \geq 0} b(\mathfrak{T})\, e_1(\mathfrak{T}\mathfrak{Z})$$

mit Summation über alle halbganzen halbpositiven symmetrischen Matrizen, folgt dann eine Entwicklung der Form

$$f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{H} = \sum_{\mathfrak{T} \geq 0} a(\mathfrak{T})\, e_q(\mathfrak{T}\mathfrak{Z})$$

mit geeignetem natürlichen q. Hilfssatz 3 vollendet dann den Beweis.

2. *Beweis von Satz 2.* Wegen Hilfssatz 3 folgt Teil b sofort aus Teil a. Für $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k, v\}$ hat man in der Bezeichnung des Satzes sofort:

$$f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R} \in \{M_n[Q], k, 1\}.$$

Da

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{E} & Q \cdot \mathfrak{S} \\ 0 & \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}' \text{ ganz},$$

zu $M_n[Q]$ gehört, folgt aus (B) sofort $f(\mathfrak{Z} + Q\,\mathfrak{S}) = f(\mathfrak{Z})$, und wegen (A) existiert daher eine in jedem abgeschlossenen Bereich von H_n gleichmäßig absolut konvergente Fourierentwicklung der Form

$$f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R} = \sum_{\mathfrak{T}} a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R})\, e_Q(\mathfrak{T}\mathfrak{Z}), \tag{3.1}$$

bei der über alle symmetrischen halbganzen Matrizen $\mathfrak{T}^{(n)}$ zu summieren ist. Außerdem gehört auch

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{U}' & 0 \\ 0 & \mathfrak{U}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{U} \text{ aus } \Omega_n[Q],$$

zu $M_n[Q]$, und daher ist $f(\mathfrak{Z}[\mathfrak{U}]) = f(\mathfrak{Z})$ für jedes $\mathfrak{U}$ aus $\Omega_n[Q]$. Die Entwicklung (3.1) ist eindeutig, also

$$a(\mathfrak{T}[\mathfrak{U}], \mathfrak{R}) = a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R}), \quad \mathfrak{U} \text{ aus } \Omega_n[Q],$$

und mit

$$g_Q(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T}) = \sum_{\substack{\mathfrak{U} \in \Omega_n[Q] \\ \mathfrak{U} \in \Gamma_Q(\mathfrak{T})}} e_Q(\mathfrak{U}'\mathfrak{T}\mathfrak{U}\mathfrak{Z}) \tag{3.2}$$

schreibt sich (3.1)

$$f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R} = \sum_{\mathfrak{T} \bmod \Omega_n[Q]} a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R})\, g_Q(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T}) \tag{3.3}$$

mit Summation über alle symmetrischen halbganzen $\mathfrak{T}^{(n)} \bmod \Omega_n[Q]$.

In (3.3) betrachte man nun diejenigen Teilreihen $g_Q(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$, für die $\mathfrak{T}$ nicht halbpositiv ist. Es wird gezeigt werden, daß dann $g_Q(i\,\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ divergiert, d.h. der zugehörige Koeffizient $a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R})$ muß Null sein, da ja die ganze Reihe (3.3) für alle $\mathfrak{Z}$ aus H_n absolut konvergent ist. Bezeichnet man mit $u(\mathfrak{T}, m)$ die

Anzahl der $\mathfrak{U}$ aus $\Omega_n[Q]$, die nach $\Gamma_Q(\mathfrak{T})$ nicht linksassoziiert sind und der Gleichung

$$\sigma(\mathfrak{U}'\mathfrak{T}\mathfrak{U}) = m$$

genügen, so folgt

$$g_Q(i\mathfrak{E},\mathfrak{T}) = u(\mathfrak{T},0) + \sum_{m=1}^{\infty}\{u(\mathfrak{T},m)\,t^{-m} + u(\mathfrak{T},-m)\,t^m\}, \quad t = e^{\frac{2\pi}{Q}}.$$

Es muß dabei natürlich angenommen werden, daß $u(\mathfrak{T},m)$ endlich ist. Sollte aber nur ein m unendlich oft in der angegebenen Weise dargestellt werden, so ist die Divergenz von $g_Q(i\mathfrak{E},\mathfrak{T})$ augenfällig. Nach Hilfssatz 4 sind aber für indefinites $\mathfrak{T}$ die $u(\mathfrak{T},m)$ und $u(\mathfrak{T},-m)$ für unendlich viele natürliche m positiv, d.h. $g_Q(i\mathfrak{E},\mathfrak{T})$ kann nicht konvergieren. Ist dagegen $-\mathfrak{T} \geqq 0$, dann folgt $u(\mathfrak{T},m) = 0$ für $m > 0$ und

$$(3.4) \qquad g_Q(i\mathfrak{E},\mathfrak{T}) = u(\mathfrak{T},0) + \sum_{m=1}^{\infty} u(-\mathfrak{T},m)\,t^m \geqq \sum_{m=1}^{\infty} u(-\mathfrak{T},m),$$

so daß (3.4) divergieren muß, wenn $\mathfrak{T} \neq 0$ ist, da die Reihe nicht abbricht. Damit ist Satz 2a vollständig bewiesen, denn die Behauptungen über die Fourierkoeffizienten folgen aus der Eindeutigkeit der Entwicklung (3.1).

3. *Beweis von Satz 3.* Jedes $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k, v\}$ liegt sicher auch in $\{M_n[q], k, 1\}$ und da in Satz 3 keine Aussage explizit von K abhängt, genügt es, den Satz für $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{M_n[q], k, 1\}$ zu beweisen. Für die Fourierkoeffizienten $a(\mathfrak{T},\mathfrak{E})$ von $f(\mathfrak{Z})$ nach Satz 2a gelte

$$(3.5) \qquad a(\mathfrak{T},\mathfrak{E}) = 0 \quad \text{für} \quad \sigma(\mathfrak{T}) \leq \frac{-k}{2\pi}\,\mu_n(q)\,\sigma_n$$

im Falle $k \leqq 0$. Ist nun K^* die Gruppe aller $\mathfrak{M}$ aus M_n mit

$$f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{M} = f(\mathfrak{Z}),$$

dann sei $\mathfrak{M}_\mu$ ein Vertretersystem von M_n bezüglich Linksassoziation nach K^* ($\mu = 1, 2, \ldots, [M_n : K^*] = \mu_n^*$). Bildet man

$$f_\mu(\mathfrak{Z}) = f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{M}_\mu,$$

dann permutieren sich die $f_\mu(\mathfrak{Z})$ bei Anwendung eines $\mathfrak{M}$ aus M_n untereinander. Bei

$$g(\mathfrak{Z}) = \Big(\prod_\mu f_\mu(\mathfrak{Z})\Big)^2$$

ist $g(\mathfrak{Z})$ in H_n regulär analytisch, denn nach Satz 2a ist diese Behauptung für jeden Faktor richtig. Außerdem ist

$$g(\mathfrak{Z})/\mathfrak{M} = g(\mathfrak{Z}), \qquad k^* = 2 \cdot k \cdot \mu_n^*,$$
$$(k^*)$$

für jedes $\mathfrak{M}$ aus M_n, d.h. $g(\mathfrak{Z})$ liegt in $\{M_n, k^*, 1\}$. Nach Satz 1 ist $g(\mathfrak{Z})$ eine gewöhnliche SIEGELsche Modulform n-ten Grades der Dimension k^*, und

wegen (3.5) folgt für ihre Fourierkoeffizienten $b(\mathfrak{T})$ bei $k \leq 0$

$$b(\mathfrak{T}) = 0 \quad \text{für} \quad \sigma(\mathfrak{T}) \leq \frac{-k^*}{4\pi} \frac{\mu_n(q)}{\mu_n^*} \sigma_n,$$

d.h. sicher

$$b(\mathfrak{T}) = 0 \quad \text{für} \quad \sigma(\mathfrak{T}) \leq \frac{-k^*}{4\pi} \sigma_n.$$

Daher ist

$$g(\mathfrak{Z}) \equiv 0 \quad \text{nach} \quad \begin{cases} [2], \text{ Seite } 637/638, & \text{wenn } k > 0 \\ [1], \text{ Satz } 7, & \text{wenn } k \leq 0 \end{cases}$$

und daher auch $f(\mathfrak{Z}) \equiv 0$.

4. *Beweis von Satz 4.* Es genügt wieder, wenn der Satz für $\{M_n[q], k, 1\}$ bewiesen wird. Sei dazu $A_q(t)$ die Anzahl der nach $\Omega_n[q]$ inäquivalenten halbganzen halbpositiven $\mathfrak{T}^{(n)}$ mit $\sigma(\mathfrak{T}) \leq t$. Da die Fourierkoeffizienten eines $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{M_n[q], k, 1\}$ für diejenigen Matrizen $\mathfrak{T}$, die nach $\Omega_n[q]$ äquivalent sind, übereinstimmen, gibt es höchstens

$$A_q\left(\frac{-k}{2\pi} \mu_n(q)\, \sigma_n\right)$$

linear unabhängige Formen aus $\{M_n[q], k, 1\}$. Man hat aber

$$A_q(t) \leq A_1(t) \cdot \omega_n(q)$$

und

$$A_1(t) \leq \sum_{\substack{t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \\ t_1 + t_2 + \cdots + t_n \leq t}} \prod_{j=1}^{n} (4t_j + 1)^{n-j},$$

denn die Anzahl der reduzierten halbganzen halbpositiven $\mathfrak{T}^{(n)}$ mit gegebenen Diagonalelementen $t_1, \ldots, t_n$ ist höchstens

$$\prod_{j=1}^{n} (4t_j + 1)^{n-j}.$$

Also gilt

$$A_1(t) < \sum_{0 \leq t_j \leq t} \prod_{j=1}^{n} (4t_j + 1)^{n-j} = \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{s=0}^{t} (4s + 1)^{n-j} \right),$$

$$A_1(t) < \frac{1}{n!} (5t)^h, \quad h = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{3.6}$$

wenn $t > 0$ ist. Damit ist aber Satz 4 schon bewiesen.

5. *Beweis von Satz 5.* Wie bisher genügt es wieder, den Beweis $\{M_n[q], k, 1\}$ zu führen. Man setzt

$$h = \frac{n(n+1)}{2}$$

und

$$c_4 = \left[\frac{1}{n!} \left(\frac{5}{\pi} \sigma_n (h+1) \right)^h + 1 \right], \quad d = c_4 \cdot \omega_n(q) \cdot (\mu_n(q))^h.$$

Für die Anzahl $a(k^*)$ der verschiedenen Potenzprodukte in $h+2$ Variablen vom Gewicht

$$k^* = -|k_1 \cdot k_2 \cdot \cdots \cdot k_{h+2}| \cdot d \cdot (2h+2)$$

gilt nach SIEGEL [2], S. 639,

$$a(k^*) > d^{h+1} |k_1 \cdot k_2 \cdot \cdots \cdot k_{h+2}|^h. \tag{3.7}$$

Diese Potenzprodukte mögen in einer beliebigen Reihenfolge mit $F_0(\mathfrak{Z})$, $F_1(\mathfrak{Z})$, ... bezeichnet werden. Durch geeignete Wahl von ϱ_ν kann man dann in

$$F(\mathfrak{Z}) = \sum_{\nu=0}^{a(k^*)-1} \varrho_\nu F_\nu(\mathfrak{Z}) \in \{M_n[q], k^*, 1\}$$

erreichen, daß die Fourierkoeffizienten $b(\mathfrak{T})$ von $F(\mathfrak{Z})$ für $a(k^*)-1$ beliebig vorgegebene, nach $\Omega_n[q]$ nicht äquivalente Matrizen $\mathfrak{T}$ verschwinden. Nach (3.7) hat man

$$(-k^*)^h < (2h+2)^h \frac{a(k^*)}{d},$$

und wegen (3.6) folgt

$$\begin{aligned} A_q\left(\frac{-k^*}{2\pi}\mu_n(q)\,\sigma_n\right) &< \frac{\omega_n(q)}{n!}\left(\frac{-5k^*}{2\pi}\mu_n(q)\,\sigma_n\right)^h \\ &< \frac{\omega_n(q)}{n!}\left(\frac{5}{\pi}\mu_n(q)\,\sigma_n(h+1)\right)^h \frac{a(k^*)}{d} \\ &= \frac{1}{c_4}\frac{1}{n!}\left(\frac{5}{\pi}(h+1)\,\sigma_n\right)^h a(k^*) \leqq a(k^*). \end{aligned}$$

Mit Satz 3c ist Satz 5 bewiesen.

6. *Beweis von Satz 6.* Sei $f(\mathfrak{Z})$ aus $P\{K_1\}$, K^* die Gruppe aller $\mathfrak{M}$ aus K_2 mit

$$f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{M} = f(\mathfrak{Z})$$
$$(0)$$

und $\mathfrak{M}_\mu (\mu = 1, 2, \ldots, \mu^* = [K_2 : K^*])$ ein Vertretersystem von K_2 nach K^* bezüglich Linksassoziation. Bei

$$F(X, \mathfrak{Z}) = \prod_{\mu=1}^{\mu^*} (X - f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{M}_\mu), \qquad \mu^* \leqq [K_2 : K_1],$$

gilt für jedes $\mathfrak{M}$ aus K_2

$$F(X, \mathfrak{Z})/\mathfrak{M} = F(X, \mathfrak{Z}),$$
$$(0)$$

d.h. $F(X, \mathfrak{Z})$ liegt im Polynomring einer Unbestimmten über $P\{K_2\}$. Die Nullstellen von $F(X, \mathfrak{Z})$ sind nach Wahl von K^* alle verschieden, d.h. jedes $f(\mathfrak{Z})$ aus $P\{K_1\}$ ist separabel von einem Grad $\leqq [K_2 : K_1]$ in bezug auf $P\{K_2\}$. Man nehme nun an, es gibt in $P\{K_1\}$ $l = 1 + [K_2 : K_1]$ über $P\{K_2\}$ linear unabhängige Funktionen $f_\nu(\mathfrak{Z})$. Dann ist $P\{K_2\}(f_1, f_2, \ldots, f_l)$ eine separable endliche Erweiterung von $P\{K_2\}$ in $P\{K_1\}$, die nach dem Satz vom primitiven Element einfach ist. Das primitive Element habe dann über $P\{K_2\}$ den

Grad $m_0 \geqq l$. Wegen $l > [K_2 : K_1]$ ist das ein Widerspruch. Es gibt also höchstens $[K_2 : K_1]$ über $P\{K_2\}$ linear unabhängige Funktionen aus $P\{K_1\}$, d.h. der Körpergrad von $P\{K_1\}$ über $P\{K_2\}$ ist höchstens $[K_2 : K_1]$.

§ 4. Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Wird*

$$\varepsilon(q) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } q = 2 \\ \frac{1}{2}, & \text{wenn } q > 2 \end{cases}$$

gesetzt, dann gilt

$$\omega_n(q) = [\Omega_n : \Omega_n[q]] = q^{n^2-1} \prod_{p|q} \prod_{k=2}^{n} (1 - p^{-k}),$$

$$\mu_n(q) = [M_n : M_n[q]] = \varepsilon(q)\, q^{n(2n+1)} \prod_{p|q} \prod_{k=1}^{n} (1 - p^{-2k}),$$

wobei p in beiden Fällen alle verschiedenen Primteiler von q zu durchlaufen hat.

Beweis. Der Beweis wird in beiden Fällen durch Induktion nach n geführt. Es ist

$$\mu_1(q) = \varepsilon(q)\, \omega_2(q) = \varepsilon(q)\, q^3 \prod_{p|q} (1 - p^{-2})$$

wohlbekannt[2]).

a) Sei zuerst $a_n(q)$ die Anzahl der Vektoren des Systems der

$$(4.1) \quad \begin{cases} (\mathrm{mod}\, q) \text{ inkongruenten ganzen Vektoren } \mathfrak{x}' = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \text{für die es ein } \mathfrak{U} \text{ aus } \Omega_n \text{ mit } \mathfrak{U} \equiv (\mathfrak{x}\, *) \ (\mathrm{mod}\, q) \text{ gibt.} \end{cases}$$

Es wird behauptet: $a_n(q)$ ist gleich der Anzahl der Vektoren des Systems der

$$(4.2) \quad \begin{cases} (\mathrm{mod}\, q) \text{ inkongruenten ganzen Vektoren } \mathfrak{x}, \\ \text{für die es ein ganzes } \mathfrak{a} \text{ mit } \mathfrak{a}'\mathfrak{x} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, q) \text{ gibt.} \end{cases}$$

Sei dazu $\mathfrak{x}$ aus der Menge (4.1), dann gibt es also ein $\mathfrak{U}$ aus Ω_n mit $\mathfrak{U} \equiv (\mathfrak{x}\, *)$ $(\mathrm{mod}\, q)$, daher $|(\mathfrak{x}\, *)| \equiv \pm 1 \ (\mathrm{mod}\, q)$, was die Existenz eines ganzen $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}'\mathfrak{x} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, q)$ einschließt, d.h. die Menge (4.1) ist in der Menge (4.2) enthalten. Andererseits sei bei gegebenen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{a}$ die Kongruenz $\mathfrak{a}'\mathfrak{x} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, q)$ erfüllt. Bei g.g.T. $(x_1, q) = d$ gibt es dann sicher ein k $(1 \leqq k \leqq n)$ mit g.g.T. $(x_k, d) = 1$. Die Kongruenz

$$x_k + q z \equiv 1 \left(\mathrm{mod} \prod_{p|x_1,\ p \nmid d} p\right)$$

im Falle $k > 1$, bzw.

$$x_2 + q z \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, x_1)$$

im Falle $k = 1$, ist dann sicher nach z auflösbar. Der g.g.T. der Elemente von

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + q z \mathfrak{e}_k \quad (k > 1), \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{x} + q z \mathfrak{e}_2 \quad (k = 1),$$

ist dann sicher gleich 1, denn es gilt ja auch $\mathfrak{a}'\mathfrak{y} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, q)$. $\mathfrak{y}$ ist primitiv, es gibt eine Ergänzung $(\mathfrak{y}\, *)$ in Ω_n. Damit ist nachgewiesen, daß die Menge (4.1) die Menge (4.2) umfaßt, d.h. die Behauptung über $a_n(q)$ ist richtig.

[2]) Man überlegt sich zuerst, daß $\omega_n(q)$ für teilerfremde Argumente multiplikativ ist, so daß man o.E. q als Primzahlpotenz annehmen kann.

Man sieht nun leicht, daß das System (4.2) mit dem System der

$$(4.3) \qquad \begin{cases} (\mathrm{mod}\, q) \text{ inkongruenten ganzen Vektoren } \mathfrak{x} \text{ mit} \\ \text{g.g.T. } (x_1, x_2, \ldots, x_n, q) = 1 \end{cases}$$

identisch ist. Damit ist

$$(4.4) \qquad a_n(q) = q^n \prod_{p \mid q} (1 - p^{-n}),$$

denn die Anzahl von (4.3) ist nach bekannten elementaren Schlüssen gleich der rechten Seite von (4.4).

b) Mit

$$\omega_n^*(q) = \frac{\omega_n(q)}{\varepsilon(q)}, \qquad \omega_1(q) = 1,$$

ist $\omega_n^*(q)$ gleich der Anzahl der (mod q) inkongruenten $\mathfrak{U}$ aus Ω_n, so daß

$$(4.5) \qquad \frac{\omega_n^*(q)}{a_n(q)}$$

die Anzahl der (mod q) inkongruenten $\mathfrak{U}$ aus Ω_n darstellt, deren erste Spalten (mod q) kongruent sind. Sind $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ zwei solche Matrizen, dann gilt bei

$$\mathfrak{U}_\nu = (\mathfrak{x}_\nu, *), \quad \mathfrak{U}_1^{-1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{y}' \\ \mathfrak{Q} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{y}'\mathfrak{x}_1 = 1, \quad \mathfrak{Q}\mathfrak{x}_1 = 0$$

sofort

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{U}_1^{-1}\mathfrak{U}_2 = \begin{pmatrix} \mathfrak{y}'\mathfrak{x}_2 & * \\ \mathfrak{Q}\mathfrak{x}_2 & * \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod q$$

und $\mathfrak{W}$ liegt in Ω_n. (4.5) ist also gleich der Anzahl der inkongruenten

$$\mathfrak{W} \text{ aus } \Omega_n, \quad \mathfrak{W} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod q,$$

also gleich dem q^{n-1}-fachen der Anzahl der inkongruenten

$$\mathfrak{W} \text{ aus } \Omega_n, \quad \mathfrak{W} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{W}_0 \end{pmatrix} \pmod q.$$

Hier ist $|\mathfrak{W}_0| \equiv \pm 1 \pmod q$, und man zeigt durch Induktion nach der Zeilenzahl von $\mathfrak{W}_0$ leicht, daß es dann unimodulares $\mathfrak{V}^{(n-1)}$ mit

$$\mathfrak{W}_0 \mathfrak{V}^{-1} \equiv \mathfrak{E} \pmod q$$

gibt. Daher

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{U} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{V} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{V} \end{pmatrix} \pmod q, \qquad \mathfrak{U} \text{ aus } \Omega_n[q], \qquad \mathfrak{V} \text{ aus } \Omega_{n-1}.$$

$$\frac{\omega_n^*(q)}{a_n(q) \cdot q^{n-1}}$$

ist somit gleich der Anzahl der (mod q) inkongruenten $\mathfrak{V}$ aus Ω_{n-1}, und die ist $\omega_{n-1}^*(q)$. Zusammen folgt

$$\omega_n^*(q) = \omega_1^*(q) \prod_{k=2}^{n} a_k(q)\, q^{k-1},$$

so daß mit (4.4) die erste Behauptung des Hilfssatzes bewiesen ist.

c) Ganz analog a) kann man nachweisen, daß $a_{2n}(q)$ gleichzeitig die Anzahl der (mod q) inkongruenten Vektoren $\mathfrak{x}$ ist, für die es ein $\mathfrak{M}$ aus M_n mit $\mathfrak{M} \equiv (\mathfrak{x}\, *)$ (mod q) gibt, denn aus dem Beweis von Satz C in [5] entnimmt man, daß es für beliebiges primitives $\mathfrak{y}$ ein $\mathfrak{M}$ aus M_n mit $\mathfrak{y}'\mathfrak{M} = (1, 0, \ldots, 0)$ gibt.

$$\mu_n^*(q) = \frac{\mu_n(q)}{\varepsilon(q)}, \qquad n \geqq 1,$$

sei wieder die Anzahl der (mod q) inkongruenten $\mathfrak{M}$ aus M_n, also

$$\frac{\mu_n^*(q)}{a_{2n}(q)}$$

die Anzahl der (mod q) inkongruenten $\mathfrak{M}$ aus M_n mit $\mathfrak{M} \equiv (\mathfrak{e}_1\, *)$ (mod q). $\mathfrak{J}[\mathfrak{M}] = \mathfrak{J}$ liefert für diese $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{M} \equiv \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{a}' & \mathfrak{b} & \mathfrak{b}' \\ 0 & \mathfrak{A} & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{B} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{C} & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{D} \end{pmatrix} \pmod{q}.$$

Durch rechtsseitige Multiplikation mit geeigneten Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{g}' & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathfrak{g} & \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathfrak{u} & \mathfrak{u}' \\ 0 & \mathfrak{E} & \mathfrak{u} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathfrak{E} \end{pmatrix}$$

erkennt man, daß

$$\frac{\mu_n^*(q)}{a_{2n}(q) \cdot q^{2n-1}}$$

gleich der Anzahl der (mod q) inkongruenten Matrizen $\mathfrak{M}$ aus M_n mit

$$\mathfrak{M} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{A} & 0 & \mathfrak{B} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{C} & 0 & \mathfrak{D} \end{pmatrix} \pmod{q}$$

ist. Diese ist aber analog b) $\mu_{n-1}^*(q)$, so daß

$$\mu_n^*(q) = a_{2n}(q)\, q^{2n-1}\, \mu_{n-1}^*(q), \qquad n \geqq 2,$$

folgt. Ein Induktionsschluß vollendet den Beweis.

Hilfssatz 2. *Sind y_k die Diagonalelemente der reduzierten positiven Matrix $\mathfrak{Y}^{(n)} = \operatorname{Im} \mathfrak{Z}$, und ist*

$$K_q(\mathfrak{Z}) = \sum_{\mathfrak{T} \geq 0} e_q(\mathfrak{T}\mathfrak{Z})$$

mit Summation über alle symmetrischen halbganzen halbpositiven $\mathfrak{T}^{(n)}$, dann ist

$$c_5 \prod_{k=1}^{n} \left(1 + y_k^{-\frac{n+1}{2}}\right)$$

eine Majorante der Reihe der Beträge von $K_q(\mathfrak{Z})$.

Beweis. $\mathfrak{Y}$ war reduziert, es folgt daher wegen (2.1)

$$\sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{Y}) \geq c_3(t_1 y_1 + \cdots + t_n y_n).$$

Da die Anzahl der halbganzen halbpositiven $\mathfrak{T}$ mit festen Diagonalelementen $t_1, t_2, \ldots, t_n$ höchstens gleich

$$\prod_{k<l} (4\sqrt{t_k t_l} + 1) \leq \prod_{k<l} (4\sqrt{t_k} + 1)(4\sqrt{t_l} + 1) = \prod_{k=1}^{n} (4\sqrt{t_k} + 1)^{n-1}$$

ist, folgt

$$K_q(i\mathfrak{Y}) \leq \prod_{k=1}^{n} h(y_k),$$

wobei

$$h(y) = \sum_{t=0}^{\infty} (4\sqrt{t} + 1)^{n-1} e^{-c_6 t y}, \quad c_6 = \frac{2\pi}{q} c_3,$$

gesetzt ist. Die bekannte Abschätzung

$$h(y) \leq c_7 \left(1 + y_k^{-\frac{n+1}{2}}\right)$$

liefert dann die Behauptung.

Hilfssatz 3. *Ist*

$$h(\mathfrak{Z}) = \sum_{\mathfrak{T} \geq 0} a(\mathfrak{T})\, e_q(\mathfrak{T}\mathfrak{Z})$$

mit Summation über alle symmetrischen halbganzen halbpositiven $\mathfrak{T}^{(n)}$ gleichmäßig absolut in jedem abgeschlossenen ganz in H_n liegenden Bereich konvergent, dann ist $h(\mathfrak{Z})$ für alle $\mathfrak{Z}$ aus H_n mit $\operatorname{Im} \mathfrak{Z} \geq c\mathfrak{E}$ beschränkt.

Beweis. Der Beweis benutzt wesentlich eine auf SIEGEL zurückgehende Integraldarstellung von periodischen Funktionen, die als Verallgemeinerung der CAUCHYschen Integralformel aufgefaßt werden kann. Ist $W_n(q)$ der Würfel der $\mathfrak{X}^{(n)} = \mathfrak{X}' = (x_{kl})$ mit $-\frac{q}{2} \leq x_{kl} \leq \frac{q}{2}$ und $d\mathfrak{X}$ das euklidische Volumenelement,

$$d\mathfrak{X} = \prod_{k \leq l} dx_{kl},$$

dann gilt

$$h(\mathfrak{Z}) = q^{-\frac{n(n+1)}{2}} \int_{W_n(q)} K_q(\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_0)\, h(\mathfrak{Z}_0)\, d\mathfrak{X}_0, \qquad \mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{X}_0 + i\,\mathfrak{Y}_0, \tag{4.6}$$

sofern $\mathrm{Im}(\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_0) > 0$ erfüllt ist.

Zum Beweis von (4.6) ist in der Bezeichnung des Hilfssatzes

$$a(\mathfrak{T}) = q^{-\frac{n(n+1)}{2}} \int_{W_n(q)} h(\mathfrak{Z}_0)\, e_q(-\mathfrak{T}\,\mathfrak{Z}_0)\, d\mathfrak{X}_0.$$

Ersetzt man in $h(\mathfrak{Z})$ alle Koeffizienten $a(\mathfrak{T})$ durch diese Integrale, dann kann man wegen Hilfssatz 2 Summation und Integration vertauschen, sobald nur $\mathrm{Im}(\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_0)$ positiv ist. Das ist aber schon (4.6).

$c > 0$ sei jetzt vorgegeben. Man setzt in (4.6) $\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{X}_0 + \frac{i}{2} c\,\mathfrak{E}$ und wählt $\mathrm{Im}\,\mathfrak{Z} \geq c\,\mathfrak{E}$, so daß

$$\mathfrak{Y}_1 = \mathrm{Im}(\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_0) = \mathfrak{Y} - \frac{c}{2}\,\mathfrak{E} \geq \frac{c}{2}\,\mathfrak{E}$$

folgt. $\mathfrak{U}$ aus Ω_n wird jetzt derart bestimmt, daß

$$\mathfrak{Y}_2 = \mathfrak{Y}_1[\mathfrak{U}] = (y_{kl})$$

reduziert ist. Hilfssatz 2 und (4.6) liefern sodann

$$\begin{aligned} |h(\mathfrak{Z})| &\leq \operatorname*{Max}_{\mathfrak{X} \in W_n(q)} \left| h\left(\mathfrak{X} + \frac{i}{2} c\,\mathfrak{E}\right) \right| \cdot K_q(i\,\mathfrak{Y}_1) \\ &\leq c_8 K_q(i\,\mathfrak{Y}_2) \leq c_9 \prod_{k=1}^{n} \left(1 + y_k^{-\frac{n+1}{2}}\right), \end{aligned}$$

denn für unimodulares $\mathfrak{U}$ ist $K_q(\mathfrak{U}'\mathfrak{Z}\,\mathfrak{U}) = K_q(\mathfrak{Z})$. Bei

$$\mathfrak{U} = (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \ldots, \mathfrak{u}_n)$$

ist

$$y_k = \mathfrak{Y}_1[\mathfrak{u}_k] \geq \frac{c}{2}\,\mathfrak{u}_k'\,\mathfrak{u}_k \geq \frac{c}{2},$$

so daß

$$|h(\mathfrak{Z})| \leq c_{10}$$

für alle $\mathfrak{Z}$ mit $\mathrm{Im}\,\mathfrak{Z} \geq c\,\mathfrak{E}$ folgt. c_{10} hängt nur von c, n, q und der Funktion $h(\mathfrak{Z})$ ab.

Hilfssatz 4. *Ist für rationales symmetrisches indefinites* $\mathfrak{T}^{(n)}$ $(n > 1)$ $u(\mathfrak{T}, m)$ *die Anzahl der* $\mathfrak{U}$ *aus* $\Omega_n[q]$, *die nach* $\Gamma_q(\mathfrak{T})$ *nicht linksassoziiert sind und der Bedingung*

$$\sigma(\mathfrak{U}'\mathfrak{T}\,\mathfrak{U}) = m$$

genügen, dann ist $u(\mathfrak{T}, m) > 0$ *für unendlich viele positive* m *und unendlich viele negative* m.

Beweis. $\mathfrak{T}$ war indefinit, es gibt also ganze $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ mit

$$\mathfrak{T}[\mathfrak{g}_1] > 0, \quad \mathfrak{T}[\mathfrak{g}_2] < 0.$$

Aus den Matrizen

$$\mathfrak{A}_\nu^{(n)} = (\mathfrak{g}_\nu, \mathfrak{g}_\nu, \ldots, \mathfrak{g}_\nu), \qquad \mathfrak{D} = [d_1, d_2, \ldots, d_n] \quad (\nu = 1, 2)$$

mit beliebigen ganzen d_k bildet man

$$\mathfrak{U}_\nu = \mathfrak{E} + q\,\mathfrak{A}_\nu\,\mathfrak{D},$$

dann ist $\mathfrak{U}_\nu \equiv \mathfrak{E} \pmod{q}$ und

$$|\mathfrak{U}_\nu| = 1 + q\,\sigma(\mathfrak{A}_\nu\,\mathfrak{D}),$$

denn die Hauptunterdeterminanten in $\mathfrak{A}_\nu\mathfrak{D}$ von mehr als einer Zeile sind sämtlich Null. Bei $\mathfrak{g}_\nu' = (g_{1\nu}, g_{2\nu}, \ldots, g_{n\nu})$ ist

$$\sigma(\mathfrak{A}_\nu\,\mathfrak{D}) = \sum_{k=1}^{n} d_k\, g_{k\nu} \qquad (\nu = 1, 2),$$

und wegen $n > 1$ gibt es $\mathfrak{D}_\nu \neq 0$ mit $\sigma(\mathfrak{A}_\nu\mathfrak{D}) = 0$. Für jedes natürliche d liegen also bei $\mathfrak{D} = d\mathfrak{D}_\nu$ die $\mathfrak{U}_\nu$ in $\Omega_n[q]$, man hat

$$\sigma(\mathfrak{U}_\nu'\,\mathfrak{T}\,\mathfrak{U}_\nu) = \sigma(\mathfrak{T}) + 2q\,d\,\sigma(\mathfrak{T}\,\mathfrak{A}_\nu\,\mathfrak{D}_\nu) + (q\,d)^2\,\sigma(\mathfrak{D}_\nu\,\mathfrak{D}_\nu)\cdot\mathfrak{T}[\mathfrak{g}_\nu].$$

Durch Wahl von d kann sodann

$$\sigma(\mathfrak{U}_1'\,\mathfrak{T}\,\mathfrak{U}_1) > m,$$
$$\sigma(\mathfrak{U}_2'\,\mathfrak{T}\,\mathfrak{U}_2) < -m$$

für alle natürlichen $m \geqq m_0$ erreicht werden, wobei m_0 nur von $\mathfrak{T}$ abhängt.

Literatur.

[1] MAASS, H.: Über die Darstellung der Modulformen n-ten Grades durch POINCARÉsche Reihen. Math. Ann. **123**, 125—151 (1951). — [2] SIEGEL, C. L.: Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades. Math. Ann. **116**, 617—657 (1939). — [3] SIEGEL, C. L.: Note on automorphic funktions of several variables. Ann. of Math. (1) **43**, 613—616 (1942). — [4] SIEGEL, C. L.: Symplectic geometry. Amer. J. Math. **65**, 1—86 (1943). — [5] WITT, E.: Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades. Abh. math. Seminar Hansische Univ. **14**, 321—327 (1941).

Münster i. W., Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 3. Oktober 1953.)

PEYERIMHOFF, A.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 417—424 (1954)

Summierbarkeitsfaktoren für absolut Cesàro-summierbare Reihen.

Von
ALEXANDER PEYERIMHOFF.

Es ist das Ziel dieser Arbeit, alle Summierbarkeitsfaktoren beim Übergang von $|C_\alpha|$-summierbaren Reihen zu $|C_\beta|$-summierbaren Reihen anzugeben.

Wir nennen eine Reihe $\sum_0^\infty a_n$ $|C_\alpha|$-summierbar ($\alpha > -1$), wenn die durch

$$\alpha_0 = a_0, \quad \alpha_n = \frac{1}{n A_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} \nu a_\nu \quad (n \geq 1), \qquad A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n}$$

erklärte Reihe $\sum_0^\infty \alpha_n$ absolut konvergiert. Ist $\{x_n\}$ eine Zahlenfolge, so wird die $\varkappa$-te Differenz der x_n erklärt durch

$$\Delta^\varkappa x_n = \sum_{\varrho=n}^{\infty} A_{\varrho-n}^{-\varkappa-1} x_\varrho,$$

falls diese Reihe konvergiert. Ist $\varkappa \geq 0$ und $x_n = O(1)$, so existiert $\Delta^\varkappa x_n$.

Nach diesen Vorbereitungen können wir den zu beweisenden Satz folgendermaßen formulieren.

Satz 1. *Für alle $|C_\alpha|$-summierbaren Reihen ($\alpha \geq 0$) $\sum_0^\infty a_n$ ist die Reihe $\sum_0^\infty a_n \varepsilon_n$ genau dann $|C_\beta|$-summierbar ($\beta \geq 0$), wenn gilt*

$$\varepsilon_n = \begin{cases} O(n^{\beta-\alpha}) & \text{für } \beta \leq \alpha \\ O(1) & \text{für } \beta > \alpha \end{cases} \tag{1}$$

und

$$\Delta^\alpha \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right). \tag{2}$$

[Wegen (1) ist stets $\varepsilon_n = O(1)$, so daß $\Delta^\alpha \varepsilon_n$ existiert.]

Für die speziellen Faktoren $\varepsilon_n = \frac{1}{(n+1)^{\alpha-\beta}}$, $\varepsilon_n = \frac{1}{A_n^{\alpha-\beta}}$ gab KOGBETLIANTZ [5] (für den hinreichenden Teil von Satz 1) einen Beweis. Ein vereinfachter Beweis wurde vom Verfasser angegeben [7]. Für ganze Zahlen α und β wurde Satz 1 von BOSANQUET [2] bewiesen. Hier wie auch im entsprechenden Fall bei gewöhnlicher CESÀRO-Summierbarkeit treten naturgemäß beim Übergang zu nicht ganzen α und β erhebliche Schwierigkeiten auf (vgl. hierzu BOSANQUET [3]).

Im folgenden werden in § 1 verschiedene Hilfssätze aufgestellt, in § 2 werden zwei Spezialfälle von Satz 1 bewiesen. Diese Spezialfälle liefern einen Induktionsanfang für den Beweis des Satzes in § 3.

1. Hilfssätze.

Lemma 1. *Es sei* $\varkappa > 0$, $\beta \geqq \alpha \geqq 0$, $\tau(\varrho) = \operatorname{Max}(\varrho + \beta - \varkappa, \alpha)$ *für* $0 < \varrho \leqq \varkappa$. *Erfüllt eine Folge* $\{\varepsilon_n\}$ *die Bedingungen*

$$\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \qquad \Delta^\varkappa \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^\beta}\right),$$

so ist

$$\Delta^\varrho \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^{\tau(\varrho)}}\right) \quad \text{für} \quad 0 < \varrho \leqq \varkappa.$$

Beweis. Wegen $\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ ist $\Delta^\varrho \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ für[1] $\varrho \geqq 0$. Der Beweis ist erbracht, wenn im Falle $\alpha < \beta$ gilt

$$\Delta^\varrho \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^{\varrho+\beta-\varkappa}}\right) \tag{3}$$

für alle ϱ aus dem Intervall

$$\operatorname{Max}(0, \varkappa + \alpha - \beta) < \varrho \leqq \varkappa. \tag{4}$$

Ist (3) richtig für ein $\varrho = \varrho_0$ aus (4), so auch für alle ϱ mit $\varrho_0 - 1 < \varrho \leqq \varrho_0$ die in (4) liegen. Nach einem Lemma von ANDERSEN[2]) ist nämlich

$$\Delta^\varrho \varepsilon_n = \Delta^{\varrho-\varrho_0} \Delta^{\varrho_0} \varepsilon_n,$$

da $\varepsilon_n = 0(1)$, $\varrho \geqq 0$, $\varrho_0 > 0$, $\varrho - \varrho_0 > -1$ ist. Wegen[3])

$$\Delta^{\varrho-\varrho_0} \frac{O(1)}{n^{\varrho_0+\beta-\varkappa}} = O(1) \frac{1}{n^{\varrho+\beta-\varkappa}}$$

ist (3) erfüllt für die in Rede stehenden Werte von ϱ. Da (3) für $\varrho = \varkappa$ nach Voraussetzung gilt, ist diese Beziehung für alle ϱ aus (4) erfüllt.

Lemma 2. *Erfüllt eine Folge* $\{\varepsilon_n\}$ *die Bedingung*

$$\varepsilon_n = O(1), \quad \Delta^\alpha \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \qquad \alpha \geqq 0, \tag{5}$$

so ist

$$\varepsilon_n = O(1), \quad \Delta^\alpha \left(\frac{\varepsilon_n}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \qquad \alpha \geqq 0. \tag{6}$$

[1]) Für $\varrho \geqq 0$ ist $\sum_{n=\nu}^{\infty} |A_{n-\nu}^{-\varrho-1}| < \infty$.

[2]) Ist $\varepsilon_n = O(1)$ $(= o(1))$, so existieren $\Delta^{\alpha+\beta}\varepsilon_n$ und $\Delta^\beta(\Delta^\alpha \varepsilon_n)$ für alle Zahlen $\alpha > 0$, $\beta > -1$, $\alpha + \beta > 0$ $(\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq -1$, $\alpha + \beta \geqq 0)$ und sind einander gleich. Vgl. ANDERSEN [1], BOSANQUET [3].

[3]) Ist $\gamma \geqq 0$ und $\delta > |\gamma|$, so ist $\Delta^\gamma \frac{O(1)}{n^\delta} = \frac{O(1)}{n^{\delta+\gamma}}$. Dies folgt unmittelbar aus der für $\alpha > -1$, $\beta > \alpha$ gültigen Beziehung $\sum_{\mu=n}^{\infty} \frac{A_{\mu-n}^\alpha}{\mu A_\mu^\beta} = \frac{1}{n A_n^{\beta-\alpha-1}}$ $(n \geqq 1)$, da hier $A_{\mu+n}^\alpha \geqq 0$ ist.

Beweis für $\alpha > 0$ ($\alpha = 0$ ist trivial). Es sei k ganz und $0 \leqq k < \alpha \leqq k+1$. Nach dem Lemma von ANDERSEN ist für $n \geq 1$

$$\Delta^{\alpha} \frac{\varepsilon_n}{n} = \Delta^{\alpha-(k+1)} \Delta^{k+1} \frac{\varepsilon_n}{n}.$$

Die Richtigkeit von (6) ist bewiesen, wenn gilt[4])

$$\Delta^{\alpha-(k+1)} \left(\frac{O(1)}{n^{k+2-l}} \Delta^l \varepsilon_n \right) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}} \right) \quad \text{für} \quad l = 0, 1, \ldots, k \tag{7}$$

und

$$\Delta^{\alpha-(k+1)} \left(\frac{\Delta^{k+1} \varepsilon_n}{n+k+1} \right) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}} \right). \tag{8}$$

Nach Lemma 1 folgen aus (5) die Abschätzungen $\Delta^l \varepsilon_n = O(1/n^l)$ für $l = 0, 1, \ldots k$ und daraus folgt (7) unmittelbar[3]).

Nach dem Lemma von ANDERSEN ist $\Delta^{k+1} \varepsilon_n = \Delta^{k+1-\alpha} (\Delta^{\alpha} \varepsilon_n)$ und deshalb wegen (5) mit $\beta_n = O(1)$

$$\Delta^{\alpha-(k+1)} \left(\frac{\Delta^{k+1} \varepsilon_n}{n+k+1} \right) = \sum_{\varrho=n}^{\infty} \frac{A_{\varrho-n}^{k-\alpha}}{\varrho+k+1} \sum_{\mu=\varrho}^{\infty} A_{\mu-\varrho}^{\alpha-k-2} \frac{\beta_\mu}{\mu^\alpha}$$

$$= \sum_{\mu=n}^{\infty} \frac{\beta_\mu}{\mu^\alpha} \sum_{\varrho=n}^{\mu} A_{\mu-\varrho}^{\alpha-k-2} A_{\varrho-n}^{k-\alpha} \frac{1}{\varrho+k+1} \qquad (n \geq 1).$$

Nun ist

$$\sum_{\varrho=n}^{\mu} A_{\mu-\varrho}^{\alpha-k-2} A_{\varrho-n}^{k-\alpha} \frac{1}{\varrho+k+1} = \frac{1}{\mu+k+1} \left(\sum_{\varrho=n}^{\mu} A_{\mu-\varrho}^{\alpha-k-2} A_{\varrho-n}^{k-\alpha} \left\{ 1 + \frac{\mu-\varrho}{\varrho+k+1} \right\} \right)$$

$$= \frac{\delta_{\mu,n}}{\mu+k+1} + \frac{O(1)}{\mu \cdot n}$$ [5]) (es ist $A_{\mu-\varrho}^{\alpha-k-2} (\mu-\varrho) = c\, A_{(\mu-1-\varrho)}^{\alpha-k-1}$ für $\varrho < \mu$).

Aus dieser Abschätzung ergibt sich die Gültigkeit von (8).

Lemma 3. *Erfüllt eine Folge* $\{\varepsilon_n\}$ *die Bedingung* (6), *so ist*

$$\varepsilon_n = n \Delta^{-\alpha} \left(\Delta^{\alpha} \frac{\varepsilon_n}{n} \right) = n \Delta^{-\alpha} \frac{O(1)}{n^{\alpha+1}} \qquad \alpha \geq 0 \quad (n \geq 1). \tag{9}$$

Beweis für $\alpha > 0$ ($\alpha = 0$ ist trivial). Wir zeigen zunächst: Ist

$$\frac{\varepsilon_n}{n} = \Delta^{-\delta} \left(\Delta^{\delta} \frac{\varepsilon_n}{n} \right) \tag{10}$$

für ein δ mit $0 \leqq \delta \leqq \alpha$, so gilt (10) auch, wenn δ durch $\delta+1$ ersetzt wird, falls noch $\delta+1 \leqq \alpha$ ist. Wegen $\frac{\varepsilon_n}{n} = O(1)$ ist zunächst nach dem Lemma von ANDERSEN

$$\Delta^{\delta} \frac{\varepsilon_n}{n} = \Delta^{-1} \left(\Delta^{1+\delta} \frac{\varepsilon_n}{n} \right).$$

---

[4]) Für ganzes $p \geq 0$ ist $\Delta^p x_n y_n = \sum_{\lambda=0}^{p} \binom{p}{\lambda} \Delta^{\lambda} x_n \, \Delta^{p-\lambda} y_{n+\lambda}$.

[5]) $\delta_{\mu,n} = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = n \\ 0 & \text{für } \mu \neq n. \end{cases}$

Nach Lemma 1 ist $\Delta^{\delta+1}\frac{\varepsilon_n}{n} = O\left(\frac{1}{n^{\delta+2}}\right)$ $(\delta+1 \leqq \alpha)$ und deshalb[6])

$$\frac{\varepsilon_n}{n} = \Delta^{-\delta}\left(\Delta^{-1}\left\{\Delta^{\delta+1}\frac{\varepsilon_n}{n}\right\}\right) = \Delta^{-(\delta+1)}\left(\Delta^{\delta+1}\frac{\varepsilon_n}{n}\right).$$

Ist $k<\alpha\leqq k+1$, so ist (10) nach dem Lemma von ANDERSEN erfüllt für $\delta=\alpha-k\leqq 1$ und dies zieht nach der eben durchgeführten Überlegung die Gültigkeit von (10) für $\delta=\alpha$ nach sich.

Lemma 4. *Erfüllt eine Folge* $\{\varepsilon_n\}$ *die Bedingung* (9) $\left(\text{mit } \Delta^{\alpha}\frac{\varepsilon_n}{n} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)\right)$, *so erfüllt sie auch* (5).

Beweis für $\alpha>0$ ($\alpha=0$ ist trivial). Zunächst folgt aus (9) unmittelbar, daß $\varepsilon_n = O(1)$ ist[3]). Ferner ist mit $\beta_n = O(1)$

$$\Delta^{\alpha}\varepsilon_n = \sum_{\varrho=n}^{\infty} A_{\varrho-n}^{-\alpha-1}\,\varrho \sum_{\mu=\varrho}^{\infty} A_{\mu-\varrho}^{\alpha-1}\frac{\beta_\mu}{\mu^{\alpha+1}} = \sum_{\mu=n}^{\infty}\frac{\beta_\mu}{\mu^{\alpha+1}}\sum_{\varrho=n}^{\mu} A_{\mu-\varrho}^{\alpha-1}A_{\varrho-n}^{-\alpha-1}\,\varrho \qquad (n\geqq 1),$$

woraus wegen

$$\sum_{\varrho=n}^{\mu} A_{\mu-\varrho}^{\alpha-1}A_{\varrho-n}^{-\alpha-1}\{(\varrho-n)+n\} = O(1) + n\,\delta_{\mu,n}$$

die Behauptung abgelesen werden kann.

Der für das folgende wesentliche Inhalt der Lemmata 2—4 besagt, daß die Bedingungen (5), (6) und (9) gleichbedeutend sind. Dabei kann (9) folgendermaßen formuliert werden: *Es gibt eine Folge* $\beta_n = O(1)$, *so daß* (*für ein* $\alpha\geqq 0$) *gilt*[7])

$$\varepsilon_n = \sum_{\varrho=n}^{\infty}\beta_\varrho\frac{A_{\varrho-n}^{\alpha-1}\,n}{A_\varrho^{\alpha}\,\varrho} \qquad \textit{für } n\geqq 1. \tag{11}$$

Lemma 5. *Ist* $\sum a_n$ *eine* $|C_\alpha|$*-summierbare Reihe, so ist für* $\alpha>0$ *die Reihe* $\sum_1^{\infty}\frac{\delta_n}{n}$ *mit* $\delta_n = \frac{1}{(n+1)}\sum_{\nu=1}^{n}\nu\,a_\nu$ $(n\geqq 1)$ $|C_{\alpha-1}|$*-summierbar und die Reihe* $\sum_1^{\infty}(n\,a_n-(n-1)\,a_{n-1})$ *ist* $|C_{\alpha+1}|$*-summierbar für* $\alpha>-1$.

Beweis. Es ist $\sum\frac{\delta_n}{n}$ die C_1-transformierte Reihe von $\sum_1^{\infty}a_n$, während $\sum_1^{\infty}a_n$ die C_1-transformierte Reihe von $\sum_1^{\infty}((n+1)\,a_n-(n-1)\,a_{n-1})$ ist. Die Behauptungen folgen nun unmittelbar aus dem bekannten Äquivalenzsatz[8]) $|C_{\alpha-1}C_1|\approx|C_\alpha|$ $(\alpha>0)$.

---

[6]) Ist $\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^{\delta'+1}}\right)$, $\delta'>\delta\geqq 0$, so ist $\Delta^{-\delta}(\Delta^{-1}\varepsilon_n) = \Delta^{-1-\delta}\varepsilon_n$.

[7]) Hier ist zu beachten, daß für $\alpha>-1$ $\varrho A_\varrho^{\alpha} = c\,\varrho^{\alpha+1}+o(\varrho^{\alpha+1})$ ist mit $c\neq 0$.

[8]) Vgl. [4], Satz 5.

2. Die Fälle $0 \leqq \alpha \leqq 1$, $\beta \geqq 0$ und $0 \leqq \beta \leqq 1$, $\alpha \geqq 0$.

Lemma 6. *Es sei* $0 \leqq \alpha \leqq 1$, $\beta \geqq 0$. *Ist* $\sum a_n$ *eine* $|C_\alpha|$*-summierbare Reihe und erfüllt eine Folge* $\{\varepsilon_n\}$ *die Bedingungen* (1) *und* (11), *so ist die Reihe* $\sum a_n \varepsilon_n$ $|C_\beta|$*-summierbar*[9]).

Beweis. Bezeichnen wir die C_α-Transformation der Reihe $\sum a_n$ mit $\sum \alpha_n$ und die C_β-Transformation der Reihe $\sum a_n \varepsilon_n$ mit $\sum \beta_n$, so ist[10])

$$\beta_0 = \varepsilon_0 \alpha_0, \quad \beta_n = \frac{1}{n A_n^\beta} \sum_{\mu=1}^{n} \mu A_\mu^\alpha \alpha_\mu \sum_{\nu=\mu}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-1} A_{\nu-\mu}^{-\alpha-1} \varepsilon_\nu \quad \text{für} \quad n \geqq 1$$

und die Behauptung ist genau dann richtig, wenn gilt

$$\mu^{\alpha+1} \sum_{n=\mu}^{\infty} \frac{1}{n A_n^\beta} \left| \sum_{\nu=\mu}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-1} A_{\nu-\mu}^{-\alpha-1} \varepsilon_\nu \right| = O(1) \qquad (\mu \to \infty, \ \mu \geqq 1). \tag{12}$$

Es ist

$$\sum_{\nu=\mu}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-1} A_{\nu-\mu}^{-\alpha-1} (\varepsilon_\mu + (\varepsilon_\nu - \varepsilon_\mu)) = \varepsilon_\mu A_{n-\mu}^{\beta-\alpha-1} + \sum_{\nu=\mu}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-1} A_{\nu-\mu}^{-\alpha-1} (\varepsilon_\nu - \varepsilon_\mu). \tag{13}$$

Ist $\beta = 0$, so geht die rechte Seite über in $\varepsilon_n A_{n-\nu}^{-\alpha-1}$ und (12) ist dann erfüllt wegen (1) und $\sum_{n=\mu}^{\infty} |A_{n-\mu}^{-\alpha-1}| < \infty$. Wir dürfen im folgenden also annehmen, daß $\beta > 0$ ist. Setzt man das erste Glied auf der rechten Seite von (13) für die innere Summe in (12) ein, so ist (12) erfüllt wegen (1) und $\sum_{n=\mu}^{\infty} |A_{n-\mu}^{\beta-\alpha-1}| < \infty$ für $\beta \leqq \alpha$ bzw. Fußnote [3]) für $\beta > \alpha$[11]). Trägt man im zweiten Glied rechts für ε_ν und ε_μ die Darstellung (11) ein, so gilt nach einer einfachen Umformung

$$\left\{ \begin{aligned} A_{n,\mu} &= \sum_{\nu=\mu}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-1} A_{\nu-\mu}^{-\alpha-1} (\varepsilon_\nu - \varepsilon_\mu) \\ &= \sum_{\varrho=\mu}^{n} \frac{\beta_\varrho}{\varrho A_\varrho^\alpha} \left(\left\{ \sum_{\nu=\mu}^{\varrho} A_{\varrho-\nu}^{\alpha-1} A_{\nu-\mu}^{-\alpha-1} A_{n-\nu}^{\beta-1} \nu \right\} - A_{n-\mu}^{\beta-\alpha-1} A_{\varrho-\mu}^{\alpha-1} \mu \right) + \\ &\quad + \sum_{\varrho=n+1}^{\infty} \frac{\beta_\varrho}{\varrho A_\varrho^\alpha} \sum_{\nu=\mu}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-1} A_{\nu-\mu}^{-\alpha-1} (A_{\varrho-\nu}^{\alpha-1} \nu - A_{\varrho-\mu}^{\alpha-1} \mu) \\ &= \sum_{\varrho=\mu}^{n} \frac{\beta_\varrho}{\varrho A_\varrho^\alpha} (\mathrm{I} - A_{n-\mu}^{\beta-\alpha-1} A_{\varrho-\mu}^{\alpha-1} \mu) + \sum_{\varrho=n+1}^{\infty} \frac{\beta_\varrho}{\varrho A_\varrho^\alpha} \mathrm{II}. \end{aligned} \right. \tag{14}$$

[9]) Für $\beta \geqq \alpha$ ist die Bedingung (1) nach Lemma 4 eine Folge aus (11).

[10]) Vgl. hierzu [7] S. 263.

[11]) Diese Fallunterscheidung kann vermieden werden, wenn man beachtet, daß es genügt, wenn Lemma 6 für den Fall $\beta \leqq \alpha$ bewiesen wird; dies folgt unmittelbar aus der Beziehung $|C_k| \subseteq |C_{k'}|$ für $-1 < k \leq k'$ (vgl. [4]) und der Tatsache, daß die Bedingungen (1) und (11) für $\beta > \alpha$ und $\beta = \alpha$ gleich sind. Diese Bemerkung bringt jedoch keine weitere Vereinfachung des folgenden Beweises.

Zur Abschätzung von I und II verwenden wir die folgenden Ungleichungen: $0 \leqq A^{\gamma}_{n-\nu_1}\nu_1 \leqq A^{\gamma}_{n-\nu_2}\nu_2$ für $-1 \leqq \gamma \leqq 0$, $0 \leqq \nu_1 \leqq \nu_2 \leqq n$, $A^{-\alpha-1}_{\nu-\mu} \leqq 0$ für $0 \leqq \alpha \leqq 1$ und $\nu > \mu$, $A^{\delta}_{n-\nu} \geqq 0$ für $\delta \geqq -1$, $\nu \leqq n$. Unter Verwendung dieser Ungleichungen erkennt man die Richtigkeit der Abschätzungen

$$\mathrm{I} \leqq A^{\beta-1}_{n-\mu}\,\mu \sum_{\nu=\mu}^{\varrho} \cdot A^{\alpha-1}_{\varrho-\nu} A^{-\alpha-1}_{\nu-\mu} = 0 \quad \text{für} \quad \varrho > \mu$$

und $\mathrm{II} \leqq 0$. Aus (14) folgt also (mit $|\beta_\varrho| \leqq K$) die Beziehung

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} |A_{n,\mu}| &\leqq K\left\{\sum_{\varrho=\mu}^{n} \frac{1}{\varrho A^{\alpha}_{\varrho}}\left(-\mathrm{I} + A^{\beta-\alpha-1}_{n-\mu} A^{\alpha-1}_{\varrho-\mu}\mu\right) + \sum_{\varrho=n+1}^{\infty} \frac{-\mathrm{II}}{\varrho A^{\alpha}_{\varrho}}\right\} \\ &\quad + 2K\frac{A^{\beta-1}_{n-\mu}\mu}{\mu A^{\alpha}_{\mu}} + 2K\left|A^{\beta-\alpha-1}_{n-\mu}\right|\mu \sum_{\varrho=\mu}^{n} \frac{A^{\alpha-1}_{\varrho-\mu}}{\varrho A^{\alpha}_{\varrho}} = O(1)\,\frac{(n+1-\mu)^{\beta-1}}{\mu^{\alpha}}; \end{aligned}\right.$$

der Ausdruck in { } verschwindet nämlich, da er mit $-A_{n,\mu}$ für $\varepsilon_\nu = 1$ [wegen $\beta_\varrho = 1$; beachte die Formel in Fußnote 3)] übereinstimmt, ferner ist

$$\sum_{\varrho=\mu}^{n} \frac{A^{\alpha-1}_{\varrho-\mu}}{\varrho A^{\alpha}_{\varrho}} \leqq \frac{A^{\alpha}_{n-\mu}}{\mu A^{\alpha}_{\mu}} \quad \text{und} \quad \left|A^{\beta-\alpha-1}_{n-\mu}\right| A^{\alpha}_{n-\mu} = O(1)\,(n+1-\mu)^{\beta-1}.$$

Aus der Abschätzung (15) geht nun hervor, daß (12) auch für $\beta > 0$ erfüllt ist; dies folgt unmittelbar aus der Beziehung

$$\mu^{\alpha+1} \sum_{n=\mu}^{\infty} \frac{1}{n A^{\beta}_{n}} \frac{(n+1-\mu)^{\beta-1}}{\mu^{\alpha}} = O(1) \quad (\beta > 0).$$

Lemma 7. *Es sei* $0 \leqq \beta \leqq 1$, $\alpha \geqq 0$. *Ist* $\sum a_n$ *eine* $|C_\alpha|$*-summierbare Reihe und erfüllt eine Folge* $\{\varepsilon_n\}$ *die Bedingungen* (1) *und* (11), *so ist die Reihe* $\sum a_n \varepsilon_n$ $|C_\beta|$*-summierbar.*

Beweis. Es sei k ganz und $0 \leqq k < \alpha \leqq k+1$. Wir erbringen den Beweis durch Induktion nach k. Für $k = 0$ ist die Behauptung nach Lemma 6 richtig. Wir nehmen an, daß sie bereits für alle $k \leqq p$, d.h. für alle α aus $0 < \alpha \leqq p+1$ ($p \geqq 0$) richtig ist. Es sei nun $p+1 < \alpha \leqq p+2$. Für $n \geqq 1$ ist

$$(16)\quad \sum_{1}^{n} a_\nu \varepsilon_\nu = \varepsilon_{n+1}\delta_n + \sum_{1}^{n} \varepsilon_\nu \frac{\delta_\nu}{\nu} + \sum_{1}^{n} (\nu\,\Delta\,\varepsilon_\nu)\,\frac{\delta_\nu}{\nu} = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III},$$

wo $\sum_{1}^{\infty} \frac{\delta_n}{n}$ nach Lemma 5 $|C_{\alpha-1}|$-summierbar ist. Wir zeigen zunächst, daß II und III $|C_\beta|$-limitierbar sind. Dabei machen wir Gebrauch von der Äquivalenz der Bedingungen (5), (6) und (11).

Die Folge $\{\varepsilon_n\}$ erfüllt (11), nach Lemma 4 ist also $\varepsilon_n = O(1)$, $\Delta^{\alpha}\varepsilon_n = O(1/n^{\alpha})$, und daraus nach Lemma 1

$$(17)\quad \varepsilon_n = O(1), \quad \Delta^{\alpha-1}\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$$

und $\Delta\varepsilon_n = O(1/n)$, so daß gilt

$$n\,\Delta\varepsilon_n = O(1), \qquad \Delta^{\alpha-1}\left(\frac{n\,\Delta\varepsilon_n}{n}\right) = \Delta^{\alpha}\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right). \tag{18}$$

Wegen (1) ist schließlich

$$\varepsilon_n = O(n^{\beta-(\alpha-1)}), \qquad n\,\Delta\varepsilon_n = O(n^{\beta-(\alpha-1)}). \tag{19}$$

Die Folgen $\{\varepsilon_n\}$ und $\{n\Delta\varepsilon_n\}$ erfüllen wegen (17), (18) und (19) die Bedingungen (1) und (11), wenn dort α durch $\alpha-1$ ersetzt wird. Auf Grund der Induktionsvoraussetzung sind also die Reihen $\sum_1^{\infty}\varepsilon_\nu\frac{\delta_\nu}{\nu}$ und $\sum_1^{\infty}(\nu\,\Delta\varepsilon_\nu)\frac{\delta_\nu}{\nu}$ $|C_\beta|$-summierbar, d.h. die Folgen II und III sind $|C_\beta|$-limitierbar. Wir bemerken noch, daß auch die Reihe $\sum_1^{\infty}\varepsilon_{\nu+1}\frac{\delta_\nu}{\nu}$ $|C_\beta|$-summierbar ist [wegen (17) und (19)]; ferner ist $\sum_1^{\infty}\left|\frac{\delta_\nu}{\nu}\frac{1}{\nu^{\alpha-1}}\right| < \infty$, denn die Folge $\varepsilon_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 7 wenn $\beta = 0$ ist und α durch $\alpha-1$ ersetzt wird (für diese Werte ist Lemma 7 nach der Induktionsvoraussetzung richtig).

Um die $|C_\beta|$-Limitierbarkeit von I nachzuweisen, gehen wir aus von der Beziehung

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-1}\,\nu\,(\varepsilon_{\nu+1}\,\delta_\nu - \varepsilon_\nu\,\delta_{\nu-1}) = -\sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-1}\,\nu\,\varepsilon_{\nu+1}\frac{\delta_\nu}{\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-2}(\nu+1)\,\varepsilon_{\nu+1}\,\delta_\nu$$
$$= B_n + C_n \qquad (\delta_0 = 0).$$

Da $\sum\varepsilon_{\nu+1}\frac{\delta_\nu}{\nu}$ $|C_\beta|$-summierbar ist, so ist $\sum_1^{\infty}\frac{|B_n|}{nA_n^{\beta}} < \infty$. Wegen $\sum_1^{\infty}\left|\frac{\delta_\nu}{\nu^{\alpha}}\right| < \infty$ und (1) ist

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|C_n|}{nA_n^{\beta}} \le \sum_{\nu=1}^{\infty}(\nu+1)\,|\varepsilon_{\nu+1}|\,|\delta_\nu|\sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{|A_{n-\nu}^{\beta-2}|}{nA_n^{\beta}} = O(1)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\nu+1)\,\nu^{\beta-\alpha}}{\nu^{\beta+1}}\,|\delta_\nu| < \infty.$$

Aus diesen Beziehungen folgt unmittelbar die $|C_\beta|$-Limitierbarkeit der Folge I.

3. Beweis von Satz 1.

1. Notwendigkeit der Bedingungen (1) und (2). Für den in Satz 1 angegebenen Sachverhalt ist die Bedingung (11) nach einem früheren Ergebnis des Verfassers notwendig[12]). Aus Lemma 4 ergibt sich dann die Notwendigkeit von (2). Da die genaue Größenbeschränkung der Glieder einer $|C_\alpha|$-summierbaren Reihe durch $o(n^{\alpha})$ gegeben wird[13]), ist die Bedingung (1) im Falle $\beta \le \alpha$ notwendig[14]), während (1) für $\beta > \alpha$ aus (11) folgt.

[12]) Vgl. [8], Satz 2 mit Bedingung (43) auf S. 275. (Vgl. auch § 12.) Diese Bedingung ist notwendig für die $\mathfrak{B}$-Summierbarkeit und somit erst recht für absolute $\mathfrak{B}$-Summierbarkeit.

[13]) Vgl. hierzu [8], Satz 10.

[14]) Vgl. [6], S. 38. Bei dem dort gegebenen Beweis fehlen hinter der Abschätzung $|\bar{\mu}_n| \le \sqrt[n]{|\mu_n|} + 1$ die Worte „unendlich oft".

2. Die Bedingungen (1) und (2) sind hinreichend. Wir gehen aus von einem Zahlenpaar (α, β) mit $\alpha > 1$, $\beta > 1$. Sind die Bedingungen (1) und (2) für die Zahlenpaare $(\alpha - 1, \beta)$ und $(\alpha - 1, \beta - 1)$ hinreichend, so sind sie auch für (α, β) hinreichend. Unter diesen Voraussetzungen sind nämlich die Reihen $\sum_1^\infty \varepsilon_\nu \frac{\delta_\nu}{\nu}$ und $\sum_2^\infty \varepsilon_{\nu+1} \frac{\delta_\nu}{\nu}$ wegen (17) und $\varepsilon_n = O(n^{(\beta-1)-(\alpha-1)})$ $|C_{\beta-1}|$-summierbar (und deshalb auch $|C_\beta|$-summierbar), nach Lemma 5 ist ferner die Reihe $\sum_2^\infty \left(\nu\, \varepsilon_{\nu+1} \frac{\delta_\nu}{\nu} - (\nu-1)\, \varepsilon_\nu \frac{\delta_{\nu-1}}{\nu-1}\right)$ $|C_\beta|$-summierbar, d.h. die Folge $\{\varepsilon_{n+1}\delta_n\}$ ist $|C_\beta|$-limitierbar. Schließlich ist die Reihe $\sum_1^\infty (\nu\, \Delta\, \varepsilon_\nu) \frac{\delta_\nu}{\nu}$ wegen (18) und (19) $|C_\beta|$-summierbar. Wegen (16) ist nun $\sum a_\nu \varepsilon_\nu$ $|C_\beta|$-summierbar. Nach Lemma 6 und 7 sind die Bedingungen (1) und (2) für $0 \leqq \alpha \leqq 1$, $\beta \geqq 0$ und $0 \leqq \alpha$, $0 \leqq \beta \leqq 1$ hinreichend und deshalb nach der eben durchgeführten Überlegung für alle $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$.

Literatur.

[1] ANDERSEN, A. F.: Studier over Cesàro's summabilitetsmetode. Copenhagen 1921. — [2] BOSANQUET, L. S.: Note on convergence and summability factors. J. London Math. Soc. **20**, 39—48 (1945). — [3] BOSANQUET, L. S.: Note on convergence and summability factors. III. Proc. London Math. Soc. (2) **50**, 482—496 (1949). — [4] KNOPP, K., u. G. G. LORENTZ: Beiträge zur absoluten Limitierung. Arch. Math. **2**, 10—16 (1949). — [5] KOGBETLIANTZ, E.: Sur les séries absolument sommables par la méthode des moyennes arithmétiques. Bull. Sci. Math. (2) **49**, 234—256 (1925). — [6] PEYERIMHOFF, A.: Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z. **55**, 23—54 (1952). — [7] PEYERIMHOFF, A.: Über einen Satz von Herrn Kogbetliantz aus der Theorie der absoluten Cesàroschen Summierbarkeit. Arch. Math. **3**, 262—265 (1952). — [8] PEYERIMHOFF, A.: Untersuchungen über absolute Summierbarkeit. Math. Z. **57**, 265—290 (1953).

Gießen, Mathematisches Institut der Justus Liebig-Hochschule.

(Eingegangen am 17. Oktober 1953.)

Kosmische Strahlung

Vorträge gehalten im Max Planck-Institut für Physik, Göttingen. Zweite Auflage. Von L. Biermann, P. Budini, J. Buschmann, M. Deutschmann, E. Freese, K. Gottstein, R. Hagedorn, W. Heisenberg, F. G. Houtermans, H. Jahn, G. Lüders, R. Lüst, W. Macke, H. M. Mayer, P. Meyer, G. Molière, R. Oehme, K. Ott, W. Paul, F. Sauter, A. Schlüter, K. Symanzik, M. Teucher, C. F. v. Weizsäcker, K. Wirtz, B. Zumino. Herausgegeben von Professor Dr **Werner Heisenberg,** Direktor des Max Planck-Instituts für Physik, Göttingen. Mit 256 Abbildungen und 1 Tafel. VIII, 620 Seiten Gr.-8°. 1953.

Ganzleinen DM 78.—

Inhaltsverzeichnis: Einführung: Übersicht über den heutigen Stand der Kenntnisse von der kosmischen Strahlung. — **Die Herkunft der kosmischen Strahlung:** Einfluß des Erdmagnetfeldes. Empirische Daten über die Primärkomponente. Zeitliche Schwankungen. Die Entstehung der Höhenstrahlung. — **Nukleonen und π-Mesonen:** Die Nukleonenkomponente in der Atmosphäre. „Sterne" in photographischen Platten. Durchdringende Schauer (Zählrohr- und Nebelkammermessungen). Stöße in Ionisationskammern. Empirisches über Eigenschaften der π-Mesonen. π^0-Mesonen und γ-Strahlung. Theorie der Explosionsschauer. Kaskaden im Atomkern. Kernverdampfungen in Photoplatten. Theorie der Verdampfungsprozesse bei Kernexplosionen. Neutronen in der Atmosphäre. Schwere instabile Teilchen. — **μ-Mesonen:** Historisches: Ältere Untersuchungen. Masse des μ-Mesons. Zerfall und Einfang der μ-Mesonen. Theorie des μ-e-Zerfalls und des μ-Einfangs. Kernstöße schneller μ-Mesonen. μ-Mesonen in der Atmosphäre. Kosmische Strahlung unter Grund. — **Elektronen-Lichtquantenkomponente:** Überblick über die Elektronen-Lichtquantenkomponente. Die Einzelprozesse der Elektronen und Lichtquanten. Ergebnisse der Kaskadentheorie. Empirisches über Elektronen und Photonen. Direkte Paarerzeugung durch Elektronen. — **Das Zusammenspiel der Komponenten:** Qualitativer Überblick. Theorie der Nukleonenkaskade. Die Entwicklung der Nukleonen-Mesonenkomponente in der Atmosphäre. Allgemeine Theorie der Elektronen-Photonenkaskade. Die Entwicklung der Elektronen-Photonenkomponente in der Luft. Experimentelles über große Luftschauer. Eindimensionale Theorie der großen Luftschauer. Winkel- und räumliche Verteilung der Elektronenkomponente der großen Luftschauer. **Anhang:** Die theoretischen Grundlagen für Streuung und Bremsung geladener Teilchen. Streuung und Bremsung energiereicher Elektronen. Die Durchführung und Auswertung von Messungen in kernphotographischen Emulsionen. Ergänzungen zur Theorie der Elektronen-Photonenkaskade und der großen Luftschauer. Klassische Feldtheorie der Mesonen. Quantisierte Feldtheorie der Mesonen. Formeln, Tabellen und Kurven. — **Verzeichnis der Abkürzungen und Formelzeichen. — Literatur- und Sachverzeichnis.**

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Geist und Wirklichkeit. Kritische Essays

Von Professor Dr. **Kurt Reidemeister,** Direktor des Mathematischen Seminars der Universität Marburg a. d. Lahn. III, 92 Seiten Gr.-8°. 1953.
Englische Broschur DM 8.60

Der systematische (zweite) Teil des Buches trägt den Untertitel „Prolegomena einer kritischen Philosophie". Die Aufgabe, die sich der Verfasser darin stellt, ist, eine Position zu beschreiben und zu begründen, von der aus sich nach der Möglichkeit der Philosophie fragen läßt und von der aus die Grenzen, in welche die Philosophie durch die Wissenschaften gesetzt wird, beurteilt werden können. Die kritische Auseinandersetzung, die dabei zu vollziehen ist, richtet sich gegen den Anspruch der Wesenserkenntnis, der durch eine Vermischung und Vertauschung von Ursprünglichkeit und Geltung a priori entsteht und die gegenwärtige Auffassung des Geistigen um so bequemer beherrscht, als er nicht klar herausgeschält und zur Diskussion gestellt wird. Die Kritik wird ergänzt durch die Abklärung eines Weges zu den Erscheinungen und der vernünftigen Erfahrung von Menschen unter Menschen, ohne Anspruch auf Geltung a priori. Dabei wird z. B. die Entstellung des Schönen, welche durch die Vermischung von Dichtungsverständnis und Wesenserkenntnis entsteht, auch unmittelbar deutlich. Bei der Begründung des Standpunktes spielt die Auffassung der Mathematik als formalen Denkmittels eine wichtige Rolle. Die Essays des ersten Teiles dienen dem Zweck, die allgemeinen und einfachen Züge der mathematischen Denkweise zu vergegenwärtigen.

Drei Dialoge über Raum, Zeit und Kausalität

Von Professor Dr. **George Jaffé,** Department of Physics, Louisiana State University, Louisiana. 211 Seiten 8°. 1953. Steif geheftet DM 9.60

Mit diesen drei Dialogen macht der Verfasser nicht allein den Physikern, sondern der ganzen Welt der Gebildeten ein Geschenk. Alle drei behandeln Problemkreise der Physik, die in den letzten Jahrzehnten zu verschiedenen Zeiten weite Kreise erregt haben, und zwar die beiden ersten die nichteuklidische Geometrie und Relativitätstheorie — sie sind schon früher veröffentlicht worden —, der letzte das Problem der Kausalität (Determinismus — Indeterminismus). Dieser dritte Dialog, an Umfang so groß wie die beiden ersten zusammen, wird heute, in einer Zeit der Gemeinschaftstagungen von Physikern, Philosophen, Theologen, auf ganz besonderes Interesse stoßen. Es sei nur an die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation erinnert und die philosophischen Konsequenzen, die daraus zu ziehen oder nicht zu ziehen sind. Die Meisterschaft des Verfassers erweist sich darin, wie er in klarer, einfacher Sprache den Inhalt einer physikalischen Theorie ohne mathematische Formel entwickelt und wie im Zwiegespräch mit dem philosophischen Freund die Grenzen der beiderseitigen Zuständigkeit abgesteckt werden und eine einigende Formel gefunden wird. Ist der Ausgangspunkt ein physikalischer (der Verfasser ist theoretischer Physiker), so ist die Methode doch eher erkenntnistheoretisch, und das eigentliche Anliegen ein solches der Metaphysik. Die Form des platonischen Dialogs ist der Darstellung angemessen, die Sprache ist bildhaft und edel, und so bereitet die Lektüre des kurzen Werkes jedem Gebildeten einen hohen Genuß. Dazu kommt, daß der Verfasser zu den im Gang befindlichen Diskussionen Entscheidendes zu sagen hat.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegen drei Prospekte des Springer-Verlages, Berlin - Göttingen - Heidelberg, bei.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.